POSGRADO en línea de MATEMÁTICA EDUCATIVA

Avances En Matemática Educativa

Teorías y enfoques

No. 3

ALEJANDRO MIGUEL ROSAS MENDOZA

Lectorum

PROGRAMA EDITORIAL DEL
PROGRAMA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA
PROME

AVANCES EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

TEORÍAS Y ENFOQUES
NO. 3

Alejandro Miguel Rosas Mendoza
Editor

Lectorum

POSGRADO en línea de MATEMÁTICA EDUCATIVA

Avances en Matemática Educativa. Teorías y Enfoques.

D. R. © Editorial Lectorum, S. A. de C.V., 2016
Batalla de Casa Blanca Manzana 147 Lote 1621
Col. Leyes de Reforma, 3ª Sección
Tel. 5581 3202
www.lectorum.com.mx
ventas@lectorum.com.mx

Programa de Matemática Educativa
www.matedu.cicata.ipn.mx

Primera Edición: Agosto de 2016
ISBN: 978-607-457-580-4

Responsable Comité Evaluador: Dr. Apolo Castañeda Alonso

Corrección Ortográfica y de Estilo: Dr. Alejandro Miguel Rosas Mendoza

Logística y Edición: Dr. Alejandro Miguel Rosas Mendoza

Diseño de Portada: Ing. Fausto Manuel Hernández Sierra

Hecho en México

Índice

Cuando Las Praxeologías Viajan De Una Institución A Otra: Una Aproximación Epistemológica Del "Boundary Crossing"

Corine Castela
Laboratoire de Didactique André Revuz)-Université de Rouen, France.
Corine.Castela@univ-rouen.fr

Resumen

En esta ponencia, el campo de investigación que me preocupa se refiere a las matemáticas en formaciones profesionales, lo que requiere considerar primero las matemáticas de la profesión misma. Me propongo presentar una problemática relevante con herramientas útiles, cualquiera sea la naturaleza y el nivel de cualificación de la profesión, desde ingeniera hasta trabajos que se consideran socialmente como no-cualificados.

En la primera sección explico la expresión "boundary crossing" del título, vinculándola con las investigaciones de matemática educativa que se refieren a la *teoría de la actividad* histórico-*cultural (TAHC). La idea central de la ponencia es que, si bien es relevante considerar desde esta teoría socio*psicológica *la formación profesional como un recorrido entre varios contextos socioculturales que cambia el estudiante, se impone previamente considerar los conocimientos que dichos contextos se proponen transmitir. Por eso, me situó dentro del marco de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) que me parece exactamente complementaria de la TACH.*

*La segunda sección presenta conceptos clave de la TAD, institución y sujetos por una parte, praxeología por la otra. Además explico lo que entiendo con la idea de "*cognición institucional" *que fundamenta mi aproximación antropológica a la epistemología. La tercera sección propone una pauta de análisis del discurso tecnológico de una praxeología: se trata de tomar en cuenta las necesidades que encuentra y intenta satisfacer una institución con respecto a una praxis. A continuación muestro como esta pauta permite analizar el discurso que proveen dos textos universitarios, uno académico y el otro con orientación profesional, sobre el mismo tipo de tareas matemáticas.*

Estos ejemplos muestran que, así como los individuos, las praxeologías cambian al cruzar una frontera entre dos instituciones. Aun cuando una institución importa para su propio uso una praxeología desde instituciones productoras de matemáticas, la desarrolla y la adapta a sus condiciones institucionales específicas. La cuarta sección presenta un desarrollo del modelo praxeológico de la TAD que tiene por objeto tomar en cuenta tal los efectos transpositivos de la circulación inter-institucional como los procesos institucionales de validación, legitimación y institutionalización de las praxeologías transpuestas. Por último, con la noción de etnopraxeología se considera la posibilidad que la creación praxeológica para tareas con aspectos matemáticos no se ubique únicamente en las instituciones de la investigación matemática, sino también que se pueda realizar en entornos laborales.

Procesos Cognitivos En La Resolución De Problemas Matemáticos Contextualizados

Elia Trejo Trejo, Patricia Camarena Gallardo, Natalia Trejo Trejo
Universidad Tecnológica Del Valle del Mezquital, Instituto Politécnico Nacional

Resumen

En este artículo se presenta la caracterización del proceso cognitivo de un grupo de enfoque ante problemas matemáticos contextualizados. Se presenta como caso particular los sistemas de ecuaciones algebraicas lineales en el contexto del balance de materia. El análisis cognitivo del grupo de enfoque se fundamenta en las teorías de los Campos Conceptuales y en la Matemática en el Contexto de las Ciencias. Los resultados son explicados en mediante las representaciones que construyen los alumnos de los invariantes operatorios en el esquema de entendimiento y de solución. Durante el análisis del actuar de los estudiantes, surgen diferentes tipos de representaciones propias del contexto en el que se desarrolla la investigación, estableciéndose una propuesta de clasificación: proposicional, figurativa no operativa, figurativa operativa, analógica y simbólica matemática. Se identifica a la representación simbólica matemática como la que propicia la comprensión y el dominio de los conceptos de interés. Por tanto, se caracterizó identificando el proceso de interpretación y selección de la información, estructuración y operacionalización. El dominio del campo conceptual se caracterizó por cinco niveles de conceptualización.

Palabras clave: campos conceptuales, representaciones, matemática en contexto, matemáticas, proceso cognitivo.

Introducción

Actualmente la importancia que tiene contextualizar el conocimiento matemático es innegable dado que se considera que el contexto y lal actividad de los estudiantes coadyuvan a acelerar los procesos cognitivos de aprendizaje. Sin embargo, en la práctica el presentar una matemática contextualizada implica desarrollar habilidades de pensamiento que permitan adquirir el conocimiento matemático y transferirlo a cualquier otra área de conocimiento.

Para lograr lo anterior, entre tantas propuestas metodológicas y para el caso particular de la investigación, destaca la propuesta por Camarena (1986) quien a través de la Matemática en Contexto de las Ciencias propone vincular las matemáticas enseñadas en el nivel superior con diversas áreas del conocimiento de los futuros ingeniero.

Ante una matemática contextualizada cobra importancia la actividad del profesor como facilitador del conocimiento mediante la selección adecuada de problemas matemáticos contextualizados y su guía en la solución de los mismos. Asimismo, es importante que a través de la investigación en aulas se proporcionen estrategias a los profesores para fomentar la integración de conocimientos matemáticos con las ciencias específicas de la formación de los futuros profesionistas y conocer desde el punto de vista cognitivo lo que ocurre con los estudiantes cuando trabajan una matemática contextualizada. Siendo esto último el principal interés de la investigación que se reporta.

Planteamiento del problema de investigación

En la Matemática Educativa se reconoce que las matemáticas enseñadas en los salones de clases difieren de la que las personas requieren en situaciones prácticas de su vida cotidiana y desde luego a la que los estudiantes una vez que culminan sus estudios necesitan en su actividad profesional. El presentar una matemática carente de sentido, para el que la estudia, incrementa el grado de dificultad de la transferencia del conocimiento matemático a otras áreas y desde luego, desarrolla actitudes negativas hacia el aprendizaje de las matemáticas.

Como una, entre tantas alternativas para evitar presentar una matemática como la descrita, se plantea la enseñanza de una matemática contextualizada en el área en que se forma y desarrollará profesionalmente el estudiante. Sin embargo, el presentar una matemática contextualizada, con problemas reales trae como consecuencia la necesidad de vincular conocimientos de diversas áreas, no sólo matemáticos. Lo anterior, supone un proceso cognitivo de mayor nivel que una matemática operatoria o algorítmica.

En ese sentido, es importante caracterizar cómo se dan los procesos cognitivos ante una matemática contextualizada con la finalidad de generar estrategias de enseñanza encaminadas al logro de un aprendizaje significativo, en donde el estudiante es el eje principal.

Dada la intencionalidad de la investigación, de aproximarse a los procesos cognitivos desarrollados por los estudiantes ante una matemática contextualizada es necesario considerar las teorías que abordan estos procesos, entre las que destacan la de Piaget (1991), la teoría de representaciones semióticas de Duval (1993), los campos conceptuales de Vergnaud (1991), las funciones cognitivas de Feuerstein (1980) entre otras. En esta investigación se ha optado por la Teoría de los campos conceptuales de Vergnaud dado que enfatiza la importancia de la adquisición de conceptos científicos y técnicos.

A la luz de esta Teoría el problema de investigación trata la problemática de aproximarse al proceso cognitivo de los estudiantes frente a un problema contextualizado. Específicamente, interesan las representaciones que construyen los estudiantes de los invariantes operatorios utilizados para abordar una situación problema.

Al trabajar con problemas contextualizados, durante el análisis de la información, es necesario tomar conceptos y/o temas específicos de la matemática como del contexto que se elija. Por tanto, se trabaja con la Matemática en el Contexto de las Ciencias, ya que permite vincular a las matemáticas con otras áreas del conocimiento. Por ser de interés de las autoras, se han seleccionado los sistemas de ecuaciones algebraicas lineales como concepto matemático y, del contexto, se toma un caso de balance de materia, situación inserta en la carrera de Técnico Superior Universitario en Procesos Alimentarios.

Para el desarrollo de la investigación, se toman como fundamentos de la contextualización y del análisis, la teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias de Camarena (1984) y los Campos Conceptuales de Vergnaud (1991), respectivamente. Durante el análisis cognitivo de los estudiantes, se consideran las características de los esquemas y sus componentes (propósitos, reglas de acción, inferencias e invariantes operatorios) que constituyen la representación de la situación problema realizada por un grupo de enfoque, por lo que se tiene la necesidad de recurrir a una propuesta de esquemas de representación y entendimiento, así como a formas de simbolización como las que realiza Flores (2003) en el marco de la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud.

En consecuencia, el objetivo de la investigación es describir el proceso cognitivo de un grupo de enfoque mediante el análisis de las representaciones que elabora de los invariantes operatorios en los esquemas de entendimiento y solución de las situaciones problema que abordan los estudiantes ante la vinculación de un sistema de ecuaciones algebraicas lineales con el balance de materia.

Marcos Teóricos

Matemática en Contexto

Como se indica en párrafos anteriores, en la Teoría de la Matemática en Contexto de las Ciencias se identifica la fase didáctica, denominada Matemática en Contexto (Camarena, 1984) que constituye el medio para que se logren los procesos cognitivos. Con la Matemática en Contexto el estudiante trabaja con una matemática contextualizada en las áreas del conocimiento de su futura profesión en estudio, en actividades de la vida cotidiana y en actividades profesionales y laborales, todo ello a través de eventos contextualizados, los cuales pueden ser problemas o proyectos.

La Matemática en Contexto contempla nueve etapas, que se desarrollan en al ambiente de aprendizaje en equipos de tres estudiantes: Líder académico, líder emocional y líder de trabajo. Estas etapas son (Camarena, 1995; 2000):

1. Determinación de los eventos contextualizados;

2. Planteamiento del evento o fenómeno contextualizado;

3. Determinación de las variables (dependientes, independientes y controladas) y las constantes del problema;

4. Inclusión de los temas y conceptos matemáticos;

5. Determinación del modelo matemático;

6. Solución matemática del problema;

7. Determinación de la solución requerida por el problema en el ámbito de las disciplinas del contexto;

8. Interpretación de la solución en términos del problema y áreas de las disciplinas del contexto;

9. Descontextualización de los conceptos y temas a tratarse en el curso.

Campos Conceptuales de Vergnaud

Una aproximación psicológica y didáctica de la formación de conceptos matemáticos lleva a considerar el aprendizaje de un concepto como el conjunto de situaciones problema que constituyen la referencia de sus diferentes propiedades y el conjunto de esquemas puestos en práctica por los sujetos en esas situaciones problema (Vergnaud, 1996). El sentido del concepto matemático se adquiere a través de los esquemas evocados por el sujeto individual para resolver una situación problema.

Los esquemas puedes ser estudiados a través de las representaciones, Vergnaud menciona que el estudiante transforma una acción sobre el objeto matemático, estableciendo control sobre sí mismo mediante las relaciones y clasificaciones en su realidad, de tal modo que se van presentando invariantes en el desarrollo del conocimiento; de esta manera, las representaciones para Vergnaud son todas aquellas herramientas, cualquier notación, signo o conjunto de símbolos que representa alguna cosa que constituye típicamente algún aspecto del mundo exterior o del mundo interior del individuo (incluida la imaginación).

Según Flores (2002) la explicación de Vergnaud sobre el esquema lleva al entendimiento de la relación entre el problema y el individuo que le da sentido y actúa en consecuencia. El esclarecimiento de cómo se coordinan y articulan los esquemas está dado por la representación que forma parte del proceso de dar significado y solucionar un problema. Mediante reglas de acción e inferencias, se identifica el problema de que se trata y cuáles son las variables conocidas y desconocidas, dando origen al esquema de entendimiento a partir del cual se llega al esquema de solución que, a su vez, conduce a la solución del problema. Con esta idea, el concepto de esquema de Vergnaud se analiza teniendo en cuenta los esquemas de entendimiento y solución que propone Flores (2002).

Método

Para realizar la investigación sobre el análisis cognitivo de los estudiantes frente a problemas matemáticos contextualizados, se seleccionaron tres problemas, mismos que han sido trabajados previamente por un grupo de docentes cuidando que las competencias requeridas para su solución se relacionen con un sistema de ecuaciones algebraicas lineales y balance de materia (Trejo y Camarena, 2011). En ese sentido, los problemas o eventos contextualizados que posibilitan el análisis de la actividad cognitiva de los estudiantes se muestran en la figura 1. Es importante destacar que los problemas contextualizados se asocian con un balance de materia, se resuelven mediante un sistema de ecuaciones algebraicas lineales y tienen diferente grado de dificultad.

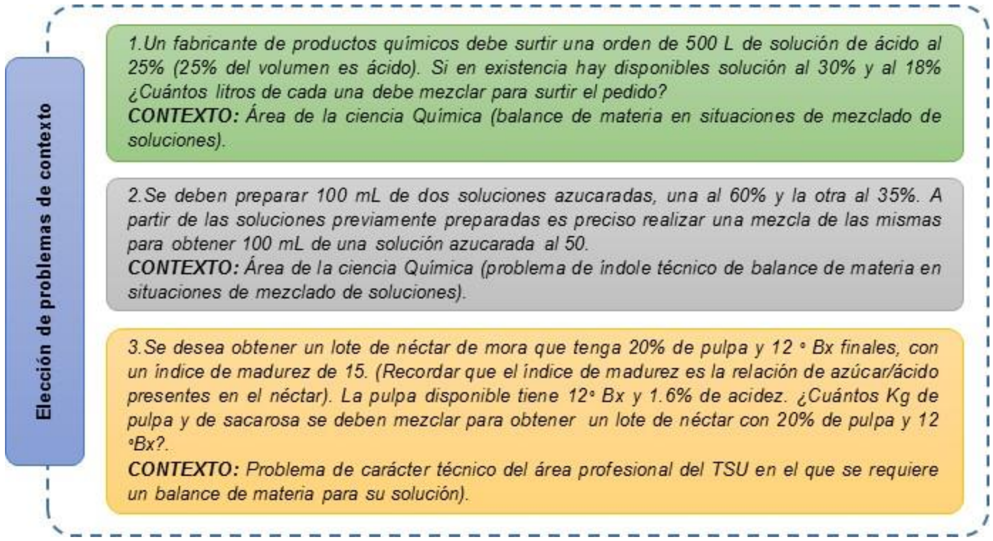


Figura 1. Problemas de contexto. Adaptado de Trejo y Camarena (2011).

Una vez seleccionados los problemas contextualizados, se desarrollan las dos etapas siguientes:

1) Contextualización de sistemas de ecuaciones algebraicas lineales en el balance de materia, utilizando las etapas de contextualización de la matemática en contexto.
2) Caracterización del proceso cognitivo de los estudiantes al trabajar con problemas matemáticos contextualizados mediante el análisis del actuar de los estudiantes a través de sus representaciones de las invariantes de los esquemas de entendimiento y solución a los que recurren durante la solución de las situaciones problema.

La muestra

Se trabaja con un grupo de enfoque de tres estudiantes del primer cuatrimestre de la carrera de Técnico Superior Universitario en Procesos Alimentarios, los cuales se encuentran cursando una asignatura de matemáticas que incluye el tema de sistemas de ecuaciones algebraicas lineales, así como un curso de química en el que se aborda el tema de balance de materia mediante el mezclado de soluciones químicas; ambos cursos están desvinculados curricularmente. El evento contextualizado que van a enfrentar es un fenómeno que se encuentra de manera recurrente en operaciones especificas del área de formación profesional y laboral del técnico en alimentos.

Instrumentos de observación

La obtención de los datos para el análisis cognitivo se hace mediante la obtención de sus hojas de trabajo y filmaciones que ayudan a refutar o confirmar el análisis que se efectúa con la información escrita. El análisis es cualitativo y atiende las diferentes representaciones que hacen los estudiantes de los invariantes en los esquemas de entendimiento y resolución que construyen en su actuar ante situaciones problema.

Implementación de las situaciones problema

Las situaciones problema son llevadas a cabo por los estudiantes en el laboratorio de ciencias en diferentes sesiones que cubren un total de dieciséis horas.

Resultados Y Discusión

Contextualización de un sistema de ecuaciones algebraicas lineales con un balance de materia

Las etapas de contextualización descritas en el apartado del marco teórico, que se encuentran inmersas en la estrategia didáctica de la matemática en contexto, constituyen el proceso metodológico que se utiliza para la contextualización de sistemas de ecuaciones algebraicas lineales (SEL) en el balance de materia (BM) en eventos contextualizados (situaciones problema) de mezclas de soluciones. En la figura 2 se muestra de forma resumida el proceso de contextualización realizado para los tres problemas contextualizados que en términos de Vergnaud se definen como las situaciones problema. Es sobre estos problemas matemáticos contextualizados sobre los que trabajan los estudiantes y que permitirán describir el actuar de los estudiantes frente al campo conceptual de sistema de ecuaciones algebraicas lineales en el contexto de un balance de materia.

ETAPA DE LA MCC			
1 Determinar evento contextualizado	**Balance de materia prima (mezclas de soluciones químicas)**		
2 Planteamiento del evento contextualizado	Un fabricante de productos químicos debe surtir una orden de 500 L de solución de ácido al 25% (25% del volumen es ácido). Si en existencia hay disponibles solución al 30% y al 18% ¿Cuántos litros de cada una debe mezclar para surtir el pedido?	Se deben preparar 100 mL de dos soluciones azucaradas, una al 60% y la otra al 35%. A partir de las soluciones previamente preparadas es preciso realizar una mezcla de las mismas para obtener 100 mL de una solución azucarada al 50.	Se desea obtener un lote de néctar de mora que tenga 20% de pulpa y 12 ° Bx finales, con un índice de madurez de 15. (Recordar que el índice de madurez es la relación de azúcar/ácido presentes en el néctar). La pulpa disponible tiene 12° Bx y 1.6% de acidez. ¿Cuántos Kg de pulpa y de sacarosa se deben mezclar para obtener un lote de néctar con 20% de pulpa y 12 °Bx?.
3 Determinar variables y constantes	mL de ácido a mezclar al 30 y 18 % Concentración de soluciones (30 y 18%) Volumen final (500 mL) Concentración final (25%)	mL a tomar de solución al 35 y 60% Concentración de soluciones (35% y 60%) Volumen final (100 mL). Concentración final (50%)	Kg de pulpa con 12°Bx y 1.6% de acidez Kg de azúcar (100°Bx) a mezclar Néctar con 20% de pulpa y 12 °Bx
4 Inclusión de temas matemáticos y de contexto	Ecuación, ecuación lineal, sistema de ecuaciones algebraicas líneas, métodos de solución, balance de materia, concentraciones químicas.		
5 Determinar del modelo matemático	$0.30x + 0.18y = 12.5$ $x + y = 500$	$0.35x + 0.60y = 50$ $x + y = 100$	$12x + 100y = 24(100)$ $x + y = 100$
6 Solución matemática	(291.6 , 208.4)	(40,60),	(83.36, 13.36).
7 8 Solución en términos del contexto e interpretación	Mezclar 291.6 L con una concentración de 30% y 208.4 L de la solución ácida de concentración al 18% para obtener 500 L de solución al 25% de ácido	Mezclar 40 mL de la solución al 35% y 60 mL al 60%. Para tener 100 mL de solución con un 50% de azúcar.	En la mezcla habrá 83.36% de pulpa con 12°Bx y 1.6% de acidez mientras que 13.36% es de azúcar (100 °Bx) el resto es agua obteniéndose 100 Kg de néctar de mora con 20% de pulpa y 12° Bx finales, con un índice de madurez de 15.
9 Descontextualización	Se retoman los problemas analizados y se formaliza el tema matemático en el salón de clases.		

Diseño de situaciones (Vergnaud)

Figura 2. Proceso de contextualización. Fuente: Elaboración propia (2014).

El proceso de contextualización de sistemas de ecuaciones algebraicas lineales en el balance de materia permitió establecer la relación entre conceptos que pertenecen a dos áreas de conocimiento distintas y observar la estrecha relación que existe entre ambas. Asimismo, permite identificar las representaciones que puede generar la situación problema y proporciona a los estudiantes un conjunto de elementos que constituyen los siguientes invariantes operacionales presentes en la situación problema.

a) Un sistema de ecuaciones lineales algebraicas con dos incógnitas determina la relación que existen entre dos variables.
b) El balance de materia se muestra como un sistema de ecuaciones lineales algebraicas que debe mantener igual la cantidad de producto que entra y la que sale, asociándolo con el sentido de igualdad.

De igual modo, durante la contextualización se identifican los conceptos matemáticos y contextuales que entran en juego, tales como ecuación algebraica, ecuación algebraica lineal, sistemas de ecuaciones, métodos de solución, balance de materia, concentraciones y mezclas de sustancias químicas.

Caracterización del proceso cognitivo de los estudiantes al resolver problemas contextualizados

Como se ha referido se trabajó con un grupo de enfoque de estudiantes del Programa Educativo de Técnico Universitario en Procesos Alimentarios. La caracterización del proceso cognitivo se realiza mediante el análisis del actuar de los estudiantes a través de las representaciones que hacen de los invariantes en los esquemas que construyen, en particular, el esquema de entendimiento y el esquema de solución, según lo que propone Flores (2002).

En seguida se describen los resultados obtenidos después de analizar los documentos escritos y las filmaciones del actuar del grupo de enfoque.

a) Adaptación de esquemas de entendimiento y solución

Durante el análisis de resultados se ha visto la necesidad de adaptar la propuesta de los esquemas de entendimiento y solución de Flores (2002) dado que estos han sido insuficientes ante la solución de los problemas matemáticos contextualizados.

En atención con lo anterior, en las categorías resultantes de la investigación se identifican:

- Un esquema de *entendimiento canónico,* en el que se observa la comprensión, por parte del grupo de enfoque, de la situación problema utilizando de forma adecuado los propósitos, las reglas de acción, las inferencias y las representaciones de los invariantes operatorios.
- Un *esquema algorítmico*, permite que el grupo de enfoque recurra a la simbolización y el procedimiento convencional del mecanismo que se va a

seguir para dar solución a la situación problema. En la investigación se distingue:

Aritmético, es cuando se hace uso de operaciones aritméticas para la resolución de las situaciones en contexto.

Algebraico, identificado cuando se recurre a la notación propia del lenguaje algebraico en la solución de las situaciones planteadas.

Consecuentemente, surgen las categorías de representación canónica algorítmica, canónica algorítmica aritmética y canónica algorítmica algebraica.

b) Identificación de representaciones propias del contexto

Durante las actividades en las situaciones problemas que surgen de la contextualización de sistemas de ecuaciones algebraicas lineales con el balance de materia, se detectó en el actuar de los estudiantes, el uso recurrente de diferentes tipos de representaciones que se consideran específicas y propias de la vinculación de dos áreas del conocimiento, es decir, que pueden o no surgir en otras vinculaciones.

Por consiguiente, además de las categorías de representación analizadas con la clasificación de Flores, y por la importancia que tuvieron las representaciones encontradas para la construcción del conocimiento de dos ciencias vinculadas, fue necesario definir una clasificación de los tipos de representaciones encontrados, quedando descritas como a)tipo proposicional (P); b)tipo figurativa no operativa (FNO); c) tipo figurativa operativa (FO); d) tipo analógica (AN) y e) tipo simbólica matemática (M). La última, considerada como la representación que permite la aprehensión del conocimiento matemático de interés se caracterizó por distinguir tres procesos para su construcción:

1. Proceso de interpretación y selección de la información;

2. Proceso de estructuración y

3. Proceso de operacionalización.

c) Procesos cognitivo al resolver problemas matemáticos contextualizados

Los resultados obtenidos permitieron elaborar una escala de desarrollo cognitivo en los estudiantes ante la solución de problemas matemáticos contextualizados (figura 3), comprobando lo referido por Vergnad en relación al dominio gradual de los conocimientos.

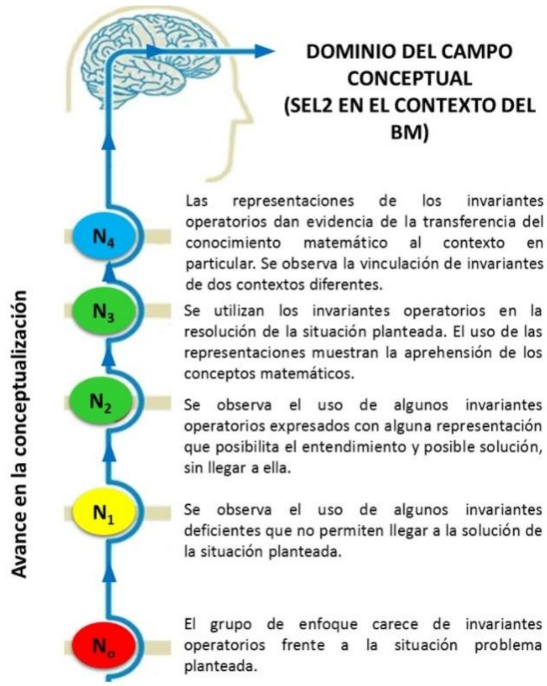


Figura 3. Dominio gradual del campo conceptual de un sistema de ecuaciones algebraico lineal en el contexto de un balance de materia. Fuente: Diseño propio (2014).

d) Sobre las representaciones de los invariantes operatorios que caracterizan el desarrollo del proceso cognitivo.

La solución experta y por tanto el dominio del campo conceptual se da cuando el grupo de enfoque entiende, estructura y domina los invariantes operatorios propios del campo. Lo anterior se observa cuando se recurre una representación simbólica matemática (analítica y gráfica) correspondiente a un sistema de ecuaciones algebraicas lineales en el contexto de balance. Es decir, se cuenta con los esquemas de entendimiento y solución para la situación planteada. El dominio del campo conceptual está en función del uso de las diferentes representaciones ante las situaciones de contexto por lo cual habrán de diseñarse o elegirse situaciones de contexto con la finalidad de acelerar los procesos cognitivos en los estudiantes.

Conclusiones

Durante el desarrollo de las actividades realizadas por el grupo de enfoque, se identificaron las categorías de representación de Flores; sin embargo, éstas no fueron suficientes para describir el actuar de los estudiantes ante una matemática contextualizada; fue necesario definir tipos de representaciones, los cuales surgieron de manera espontánea durante el actuar de los estudiantes.

Si bien al final de las sesiones los estudiantes disponen de esquemas apropiados para enfrentar eventos contextualizados que requieren sistemas de ecuaciones algebraicas lineales, es necesario explorar más acerca de esto, sobre todo en contextos diferentes.

Referencias

Camarena, G. P. (1984), “El currículo de las matemáticas en ingeniería”, en *Memorias de las Mesas redondas sobre definición de líneas de investigación en el IPN,* México.

Camarena, G. P. (1995), “La enseñanza de las matemáticas en el contexto de la ingeniería”, ponencia presentada en el XXVIII Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana, México. Camarena, G. P. (2000), Informe del proyecto de investigación titulado: “Etapas de la matemática en el contexto de la ingeniería”, México, ESIME-IPN.

Duval, R. (1993), “Semiosis y noesis”, en E. Sánchez y G. Zubieta (eds.), *Lecturas en didáctica de la matemática: Escuela Francesa,* México, Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN, pp. 118-144.

Feuerstein, R., Y. Rand, M. B. Hoffman y R. Miller (1980), *Instrumental Enrichment,* Baltimore, University Park Press.

Flores, R. (2002), *El conocimiento matemático en problemas de adición y sustracción: un estudio sobre las relaciones entre conceptos, esquemas y representación,* Tesis de Doctorado en Educación, Aguascalientes, Ags., México.

Piaget, J. (1991), *Introducción a la epistemología genética, el pensamiento matemático,* España, Paidós (Psicología Evolutiva).

Trejo, T. E.; Camarena, G. P. (2011). Análisis cognitivo de situaciones problema con sistemas de ecuaciones algebraicas en el contexto del balance de materia. Educación Matemática. Vol 23 Núm. 2, pp.65-90. Grupo Santillana, México.

Verganud, G. (1991), *El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria,* México, Trillas.

Verganud, G. (1996), “The Theory of Conceptual Fields”, en L. Stette, P. Nesher, P. Cobb, G. A. Goldin y B. Greer (eds.), *Theories of Mathematical Learning,* Mahwah, NJ, Lawrence Erlbaum, pp. 219-240.

Estudio De Las Emociones Y Su Persistencia En La Clase De Matemáticas Usando Un Enfoque Cognitivo

Alejandro Coca Santillana
Estudiante de Doctorado en Matemática Educativa, CICATA, Legaria. IPN
a_coca@yahoo.com.mx

Resumen

En esta ponencia se analizan las emociones que experimentan los alumnos en la clase de matemáticas así como su persistencia referidas por ellos mismos. Se utiliza una teoría cognitiva de las emociones para clasificar y analizar el entorno emocional ante acontecimientos, agentes y objetos, en un CECyT del IPN.

Palabras Clave: Matemáticas, emociones, teoría cognitiva

La emoción, parte del ámbito afectivo, es un proceso complejo integrado por componentes neurofisiológicos, comportamentales y cognitivos, generado por un estímulo interno o externo, valorado como agradable o desagradable y este estímulo puede ser actual o referirse a un recuerdo o incluso a un acontecimiento que esperamos en el futuro. La respuesta emocional es generalmente de corta duración y alta intensidad (Garrido, 2000). Las emociones nos acompañan en casi todas nuestras actividades y el aula de matemáticas no es la excepción. A la par de los procesos de aprendizaje se genera un entorno emocional, que puede ayudar al aprendizaje pero también puede obstaculizarlo. De forma sorprendente, este ámbito emocional es casi siempre ignorado.

En este estudio, donde se pretende conocer las emociones de los estudiantes en la clase de matemáticas, y la persistencia de estas emociones en el tiempo, se ha seleccionado el enfoque cognitivo (León. 2000) para el estudio de las emociones en el aula de matemáticas. Una de las teorías que reconoce el carácter cognitivo de la emoción es la llamada Teoría OCC, propuesta por Ortony, Clore y Collins. (1988), donde las emociones surgen como consecuencia de la reacción ante eventos, agentes y objetos de acuerdo a las concepciones que las personas tienen sobre el mundo.

Antecedentes Y Marco Teórico

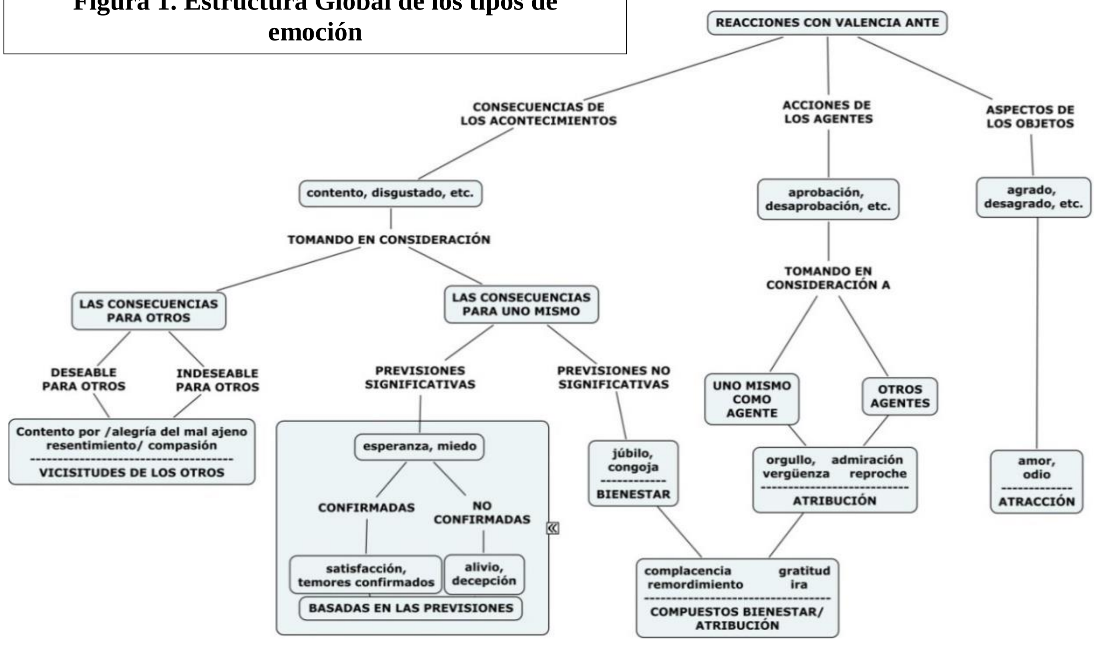
Dentro del estudio de las emociones en la clase de matemáticas el área que más desarrollo ha tenido es aquella correspondiente a emociones de los estudiantes al resolver problemas no rutinarios de matemáticas (Schoenfeld, 2007). En estas investigaciones se resalta la necesidad de hacer una representación afectiva que acompañe la resolución de problemas, mostrando que estos son no sólo una actividad intelectual sino también una actividad emocional, lo que puede llevarnos a generar estrategias motivacionales (Golding, 2000). La ansiedad y el estrés en la resolución de problemas han sido dos de los temas más estudiados (Gil, Blanco, y Guerrero, 2006).

El significado del ámbito afectivo (McLeod, 1992) y en específico las emociones (Rodríguez y Bermúdez, 2001) y su repercusión en la conducta de los estudiantes de forma sistemática ha sido abordado desde los enfoques valorativos o cognitivos para las emociones (Palmero y Martínez, 2008; Naranjo, 2009a; Naranjo, 2009b). La emoción y su parte cognitiva con un modelo metateórico ha sido sistematizada por Hannula (2002), cuando estudia la percepción de los estudiantes como aprendices de matemáticas. Recientemente y ya muy cercano a lo que se pretende estudiar en esta ponencia, se ha planteado la necesidad de estudiar las emociones que experimentan los alumnos en la clase de matemáticas, pero no en la resolución de problemas no rutinarios, sino en situaciones matemáticas rutinarias (Martinez-Sierra y García-González, 2014), adicionando a lo anterior, en este estudio, la combinación de aspectos cualitativos y cuantitativos para estudiar la persistencia de dichas emociones

Elementos Metodológicos

La teoría OCC parte de la clasificación de las emociones en tres grandes grupos que a su vez pueden subdividirse en subgrupos, y las emociones del mismo subgrupo o familia tienen condiciones desencadenantes (cognitivas) relacionadas estructuralmente, como lo muestra la clasificación correspondiente en la figura 1.

Figura 1. Estructura Global de los tipos de emoción



Fuente: Ortony, A , Clore, G. L., & Collins, A. 1988

La figura 1 muestra la clasificación de las reacciones con valencia ante acontecimientos, agentes y objetos, separando las emociones ante eventos en tres grandes clases, las que corresponden a eventos futuros y presentes esperados, las que responden a los acontecimientos que les ocurren a otros y las emociones de bienestar que son evaluaciones afectivas originadas al prestar atención a los acontecimientos en cuanto a que son deseables o indeseables para alguien. Las reacciones con valencia ante agentes, también llamado grupo de atribución comprende 4 emociones, mientras que la rama de las reacciones ante objetos da origen a emociones de atracción o repulsión. Existe finalmente un grupo formado por reacciones compuestas ante acontecimientos y agentes también llamadas emociones de bienestar-atribución.

Todos estos elementos teóricos servirán de base para el análisis de las emociones en el aula de matemáticas.

Método

En febrero de 2015, se aplicó una encuesta a 45 alumnos de los cuales 23 son mujeres (M1-M23) y 22 hombres (H1-H22) inscritos en el sexto semestre del CECyT 14 de las carreras de contaduría, informática y mercadotecnia del Nivel Medio Superior (NMS) del área de ciencias sociales del Instituto Politécnico Nacional (IPN). Con una población aproximada de 350 alumnos en sexto semestre del turno matutino, la muestra representa el 12.8%. El objetivo es conocer las emociones que experimentan los alumnos en la clase de matemáticas así como el recuerdo de ellas en cursos anteriores de matemáticas. En la encuesta se pregunta de forma abierta: ¿qué emociones experimentas en la clase de matemáticas? y ¿por qué experimentas todo eso? Asimismo, se analizaron tres preguntas sobre el recuerdo de emociones mostradas en las gráficas 1, 2 y 3 con sus respectivas opciones de respuesta.

El análisis cualitativo y, en algunos aspectos, cuantitativo de las emociones referidas por los alumnos se realiza a través de la teoría OCC, buscando clasificar el tipo de emoción de acuerdo a tres especificaciones, siguiendo la identificación propuesta por Martínez-Sierra y García (2014):

1. Con ***negritas itálicas*** se identifican las condiciones desencadenantes de la emoción
2. Las palabras que los estudiantes emplearon para designar su emoción con *itálicas simples*
3. Las variables de intensidad locales están <u>subrayadas</u>
4. Para frases incompletas, se agrega alguna palabra entre paréntesis cuadrado [ ]

Análisis de las emociones en la clase de matemáticas y resultados

En un entorno en el que las matemáticas son consideradas con un grado de dificultad alto, debe esperarse que la clase de matemáticas tenga un ambiente emocional en el que concurran tanto emociones positivas como negativas, que impulsen unas veces el aprendizaje pero otras lo limiten o bloqueen. A continuación se presentan algunas de las emociones que reportan los alumnos de acuerdo al siguiente orden:

a) análisis de reacciones emocionales ante acontecimientos

a_1) Reacciones ante los acontecimientos futuros y presentes esperados (tabla 1)

a_2) Reacciones ante acontecimientos confirmados y refutados (tabla 2)

b) Reacciones ante los agentes (tabla 3)

c) Emociones ante aspectos de los objetos (tabla 4)

a) Reacciones emocionales ante acontecimientos. A continuación se realiza el análisis de cada uno de sus incisos por medio de la tabla correspondiente y las respuestas de los alumnos a las emociones que experimentan en clase.

a_1) Reacciones ante los acontecimientos futuros y presentes esperados. Las emociones de esperanza (anticipación, esperanza, esperar, expectación, etc.) y miedo (amedrentado, ansiedad, aprensión, aterrorizado, miedo, nervioso. Preocupado, etc.) pueden ser experimentadas cuando los alumnos presentan un examen o resuelven ejercicios cuyo resultado no es conocido pero se prevé como un acontecimiento deseable o indeseable, cuya intensidad depende de la importancia que el alumno asigne al evento o que tan probable es que ocurra, como se muestra en la tabla 1.

Tabla 1. Reacciones ante los acontecimientos (futuros y presentes esperados)

Situación temporal	Valoración	Descripción	Expresiones
No confirmado	deseable	Contento por la previsión un hecho deseable	**Emociones de esperanza** (anticipación, esperanza, expectación, etc.)
No confirmado	Indeseable	Disgustado por la previsión de acontecimiento indeseable	**Emociones de miedo** (ansiedad, miedo, nervioso. Preocupado, etc.)

Fuente: Elaboración propia basado en Ortony, Clore y Collins. (1988)

Algunas de las emociones de esperanza y miedo reportadas por los alumnos fueron las siguientes:

M9: *Ánimo, emoción, temor y miedo*. Me gusta aprender [pero] me da miedo ***no aprenderlas bien.***

M23: *Tensión* porque pienso que ***los resultados que tengo en los trabajos a veces pueden estar mal*** y *me preocupa* ***no tener todo completo.***

H2: *…miedo* porque me preocupa el que ***no lo pueda desarrollar*** o que ***no llegue al resultado deseado.***

De las respuestas anteriores puede observarse que algunos estudiantes muestran emociones negativas debido a la inseguridad que tienen ante la futura confrontación de sus resultados, por otra parte no parecen darle crédito a su esfuerzo y todo lo reducen a un futuro resultado correcto o incorrecto.

a$_2$) Reacciones ante acontecimientos confirmados y refutados. Las emociones de satisfacción (complacencia, cumplimiento de las esperanzas, etc.), temores confirmados (suceder lo que se temía), alivio (sentirse aliviado, tranquilidad, etc.) y decepción (desesperanza, frustración, perder las esperanzas, etc.) se experimentan cuando se conoce el resultado de un evento, el cual es confrontado internamente con lo que el alumno esperaba.

Estas emociones ante acontecimientos confirmados y refutados también son referidas por los alumnos en la resolución de ejercicios o en exámenes, tiene tres variables locales, la fuerza con la que se esperaba un resultado, el esfuerzo empleado y el grado en que se realiza el evento. Esta información se muestra en la tabla 2.

Tabla 2. Reacciones ante los acontecimientos confirmados y refutados			
Situación	**Valoración**	**Descripción**	**Expresiones**
Confirmado	Deseable	Contento por la confirmación de la previsión de un acontecimiento deseable	**Emociones de satisfacción** (complacencia, cumplimiento de las esperanzas, etc.)
Confirmado	Indeseable	Disgustado por la confirmación de la previsión de un hecho indeseable	**Emociones de temores confirmados** (suceder lo que se temía)
Refutado	Deseable	Contento por la refutación de la previsión de un acontecimiento indeseable	**Emociones de alivio** (alivio, tranquilidad, etc.)
Refutado	Indeseable	Descontento por la refutación de la previsión de un acontecimiento deseable	**Emociones de decepción** (decepción, frustración, perder las esperanzas, etc.)

Fuente: Elaboración propia basado en Ortony, Clore y Collins. (1988)

Entre las emociones de satisfacción, temores confirmados, alivio y decepción expresadas por los alumnos destacamos las siguientes:

M4: Con cada ejercicio de matemáticas y dentro de clase siento que es <u>un reto personal</u> entenderle y realizarlo correctamente *me siento bien* ***cada que lo logro.***

M12: …*ansiedad* cuando <u>tengo poco tiempo</u> para resolver un ejercicio o cuando <u>mis compañeros acaban y yo no</u>. *Enojo* ***cuando no llego al resultado.***

H18: *Desesperación*, ***cuando no me salen bien los resultados***. *Angustia*, <u>la presión de tener el tiempo encima</u>. *Felicidad* cuando lo acabo y ***mi resultado fue el esperado.***

De las respuestas podemos destacar que además de la emoción positiva que genera un resultado correcto y la emoción negativa que significa un resultado incorrecto, los alumnos están sujetos a una presión adicional que intensifica sus emociones en función del tiempo que tardan en resolver un problema determinado. Esto significa que un gran esfuerzo al resolver un problema puede terminar en total frustración al no poder entregar un resultado.

Además de lo anterior, el número de intentos fallidos incrementa la intensidad de la emoción ya sea el resultado correcto o incorrecto. Por otra parte, obtener resultados correctos incrementa la seguridad en los resultados y genera el espíritu de competencia entre los alumnos más capaces.

b) Reacciones ante los agentes. Las características de las emociones ante los agentes como el orgullo, el autorreproche, el aprecio o el reproche que ocurren durante la resolución de ejercicios, en exámenes y en clase, se describen en la tabla 3.

Tabla 3. Reacciones ante los agentes

Situación temporal del acontecimiento	**Valoración**	**Descripción**	**Expresiones**
ocurrido	plausible	Aprobación de una acción plausible de uno mismo	**Emociones de orgullo** (orgullo)
ocurrido	censurable	Desaprobación de una acción censurable de uno mismo	**Emociones de autorreproche** (autocondena, autoinculpación, sentirse culpable, vergüenza, etc.)
ocurrido	plausible	Aprobación de una acción plausible de otra persona	**Emociones de aprecio** (admiración, aprecio, estima, respeto, etc.)
ocurrido	censurable	Desaprobación de una acción censurable de otra persona	**Emociones de reproche** (desdén, desprecio, indignación, etc.)

Fuente: Elaboración propia basado en Ortony, Clore y Collins (1988)

Entre las respuestas de los alumnos que consideramos corresponden a estos tipos de emoción, se encuentran las siguientes:

H20: *me emociona* porque <u>son muy complejas</u> pero <u>si se les pone atención</u> se puede aprender, y eso me gusta, su complejidad y como se hacen <u>muchos procedimientos</u> para llegar al resultado…*me gusta mucho* ***acabar primero*** sobre todo cuando es un tema complejo.

M21: Creo que depende <u>mucho</u> del ***maestro*** que te toque, porque si es tranquilo la clase será divertida porque no está presionando, pero si es ***grosero o va muy***

rápido, la clase será aburrida y tediosa y ***no comprendes nada***, así que te sentirás *triste y deprimido.*

Las emociones de autoaprecio se detectan a través del sentido de competencia y lo que no se observó fueron emociones de autorreproche. En cambio sí se asignan emociones positivas y negativas a la forma en que comunica las matemáticas el maestro.

c) Emociones ante aspectos de los objetos. Las características de las emociones de atracción (afecto por, atracción, gusto por, etc.) y repulsión (aborrecer, aversión, desagrado, detestar, odio, etc.) acerca de un "objeto" se presentan en la tabla 4.

Tabla 4. Emociones ante aspectos de los objetos

Situación temporal del acontecimiento	**Valoración**	**Descripción**	**Expresiones**
Pasado, presente o coincidente con la emoción	agradable	Atraído por un objeto agradable	**Emociones de atracción** (afecto por, atracción, gusto por, etc.)
Pasado, presente o coincidente con la emoción	desagradable	Repulsa ante un objeto desagradable	**Emociones de repulsión** (aborrecer, aversión, desagrado, detestar, odio, repulsión, etc.)

Fuente: Elaboración propia basado en Ortony, Clore y Collins. (1988)

En este rubro debemos hacer notar que el alumno convierte en "objeto" las matemáticas al concebirlas como una entidad con ciertas características fijas que le generan atracción o repulsión. Algunas de sus respuestas respecto a este tipo de emociones fueron:

M13: Algunas veces llego a *odiarlas* [a las matemáticas] ***porque no llego a comprenderlas***, pero la mayoría de las veces me son agradables y útiles…algunas veces el estrés por tratar de entenderlas y algunas veces todo es relajado porque se comprenden rápido.

H13: Pues felicidad y a veces odio, *felicidad* es ***cuando lo aprendí rápido***, <u>me puedo pasar haciendo muchos ejercicios</u> <u>y no me canso</u> y *odio* ***cuando ya vamos a salir y no acabo.***

Cosificar las matemáticas es todo un riesgo porque al asociar emociones de repulsión de forma continua hacia estos estudios, tarde o temprano se consolidan en una actitud negativa hacia las mismas.

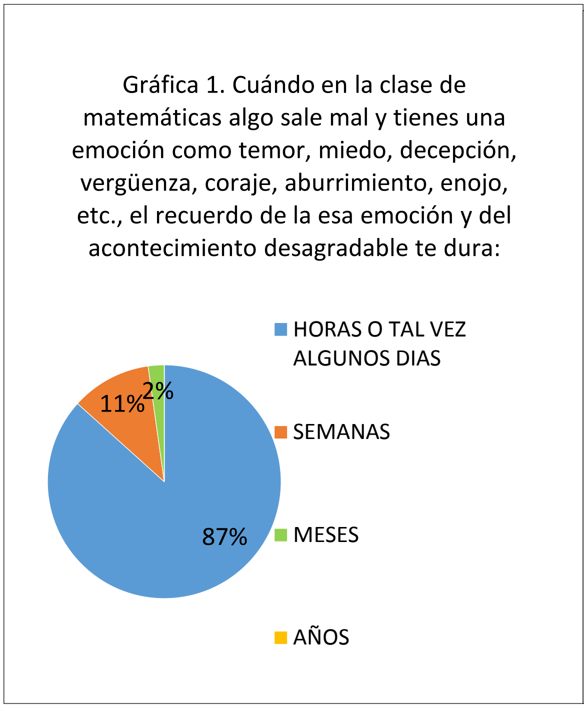
Es conocido que si bien una actitud está formada por tres partes, la cognitiva, la emocional y la actitudinal, la dominante entre ellas es la parte emocional que se arraiga profundamente en el alumno.

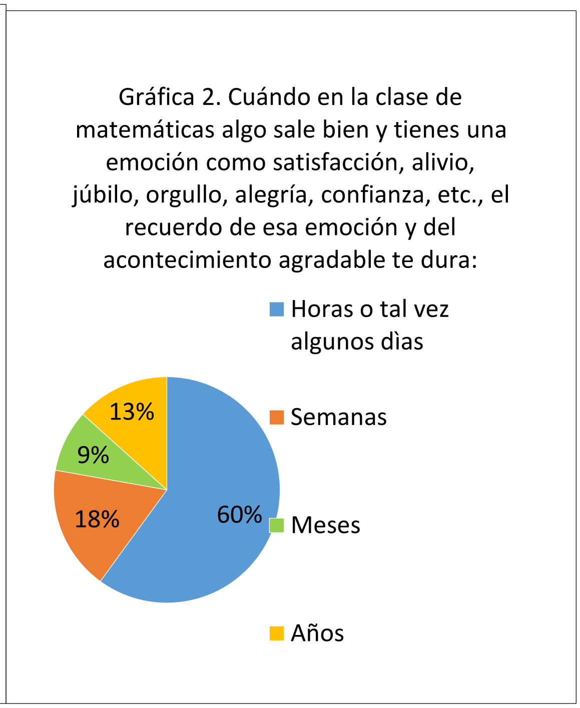
No sólo es importante el evento emotivo que puede tener el alumno en la clase de matemáticas, sino también la duración del recuerdo de esa emoción según la percibe el alumno.

En la gráfica 1 se presentan los resultados sobre la duración del recuerdo de una emoción negativa medida en horas, días, semanas, meses o años.

De la gráfica 1 podemos observar que el 87% piensa que el recuerdo de esa emoción desagradable le dura horas o tal vez algunos días, seguida del 11% que considera que la duración podría ser de semanas sólo el 2% considera que dura meses. Nadie contestó que podría durar años.

Ahora analicemos el recuerdo de una emoción pero cuando corresponde a una emoción positiva por medio de los resultados mostrados en la gráfica 2, donde puede observarse que el 60% considera que el recuerdo de una emoción le dura horas o tal vez algunos días, el 18% piensa que el recuerdo dura semanas, el 9% meses y el 13% piensa que el recuerdo de una emoción positiva puede durar años.



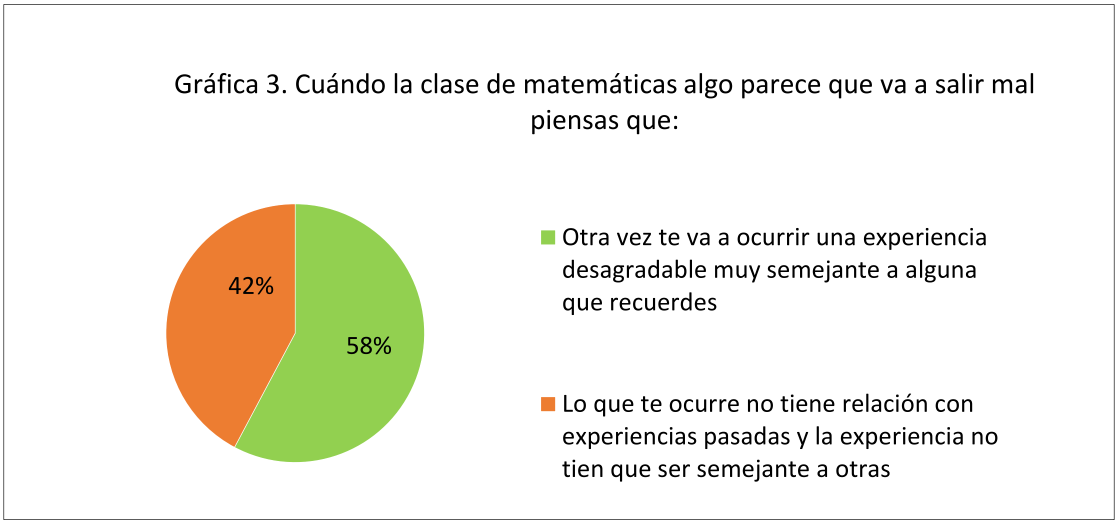


Fuente: Elaboración propia basada en encuesta

Comparando los resultados de las gráficas 1 y 2 podemos apreciar que según la perspectiva del alumno, el recuerdo de las emociones positivas es mayor que el recuerdo de las emociones negativas.

Aunque el resultado anterior puede generar cierto optimismo al pensar que el recuerdo de las emociones negativas es menor que el recuerdo de las emociones positivas no necesariamente ocurre lo mismo cuando se trata de experiencias semejantes que pueden ligar emociones. En específico, puede no ser tan importante el recuerdo de emociones en sí mismas como sí lo es el ligar un acontecimiento presente al recuerdo de un acontecimiento similar cargado de emociones, ya que esta semejanza situacional activa las mismas emociones que acompañaban al acontecimiento recordado. Este fenómeno, llamado *reacción al presente como si fuera el pasado* (Goleman, 2014) ejerce una gran influencia para fijar una actitud en el alumno, en este caso hacia el aprendizaje de las matemáticas.

La gráfica 3 permite analizar la creencia del alumno sobre el desenlace de un evento que parece que va a salir mal, donde el 58% piensa que otra vez va a ocurrir una experiencia desagradable muy semejante a alguna que recuerda contra el 42% que opina que lo que le ocurre no tiene relación con experiencias pasadas y la experiencia no tiene que ser semejante a otras. Este tipo de asociaciones son de hecho comunes en la clase de matemáticas y generan creencias y actitudes negativas hacia el aprendizaje de las mismas.



Fuente: Elaboración propia basada en encuesta

Conclusiones

El estudio de las emociones, tanto positivas como negativas, en la clase de matemáticas es una parte importante para comprender de manera completa el proceso de aprendizaje, sobre todo al ser consideradas las matemáticas unidades de aprendizaje con alto grado de dificultad.

Encontramos, de acuerdo al marco teórico de la teoría cognitiva de las emociones llamada OCC, que en la clase de matemáticas predominan las emociones ante acontecimientos (exámenes, tareas, ejercicios en clase, etc.), ya sea ante acontecimientos esperados, donde los alumnos tienen emociones de esperanza y miedo cuando aún no conocen el resultado del ejercicio, tarea o examen. También se generan en los alumnos emociones ante eventos confirmados y refutados en estos casos se tienen emociones de satisfacción temores confirmados, alivio y decepción que se experimentan cuando se conoce el resultado de un evento, el cual es confrontado internamente con lo que el alumno esperaba como resultado.

Con respecto a las emociones que surgen ante agentes, como son el orgullo y el autorreproche y el aprecio o el reproche (dirigidos a sus profesores) hacemos notar que estas emociones aparecen un tanto veladas, las emociones de autoaprecio se detectan a través del sentido de competencia y lo que no se observó fueron emociones de autorreproche.

En cuanto a emociones ante aspectos de los objetos se reportaron emociones de atracción y repulsión hacia las matemáticas. Después de conocer las emociones en la clase de matemáticas se indago acerca de la persistencia de éstas en el recuerdo de los alumnos así como su asociación ante eventos semejantes. En cuanto al recuerdo de emociones negativas el 87% piensa que el recuerdo de esa emoción desagradable le dura horas o tal vez algunos días, seguida del 11% que considera que la duración podría ser de semanas sólo el 2% considera que dura meses. Nadie contestó que podría durar años. Con respecto al recuerdo de una emoción positiva el 60% considera que el recuerdo le dura horas o tal vez algunos días, el 18% piensa que el recuerdo dura semanas, el 9% meses y el 13% piensa que el recuerdo de una emoción positiva puede durar años. Por lo anterior puede concluirse que el recuerdo de las emociones positivas es mayor que el recuerdo de las emociones negativas. En cuanto a la asociación de eventos semejantes, el 58% de los alumnos encuestados asocia experiencias que comienzan a salir mal con alguna experiencia desagradable, contra el 42% que separa los eventos y sus consecuencias. Este punto último puede ser el origen de las actitudes negativas arraigadas hacia el aprendizaje de las matemáticas.

Agradecimientos

Esta ponencia forma parte del Proyecto de Investigación número 20152041 apoyado por la Secretaría de Investigación y Posgrado del Instituto Politécnico Nacional

Referencias

Calhoun, Ch. y Solomon, R. (Compiladores). (1989) ¿Qué es una emoción? Lecturas clásicas de psicología filosófica. FCE. México.

Garrido, I. (2000). Psicología de la Emoción. Ed. Síntesis psicología. España.

Gil, N., Blanco, L. J. y Guerrero, E. (2006). El papel de la afectividad en la resolución de problemas matemáticos, *Revista de Educación*, 340. Mayo-agosto, pp. 551-569.

Golding, G. (2000). Affective patthways and representation in mathematical problema solving. *Mathematical Thinking and Learning*. 2(3), 209-219.

Goleman, D. (2014). *La Inteligencia Emocional*. Ed. Ediciones B. México.

Hannula, M. S. (2002). Attitude towards mathematics: emotions, expectations and values, *Educational Studies in Mathematics* 49, 25–46.

León, I. (2000). Evaluación Cognitiva y Emoción. *Emociones. Thémata*. No. 25, pp. 255-259.

McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics Education: a reconceptualization, in Grouws, D., Ed., *Handbook of research on mathematics teaching and learning* a Project of the National Council of Teachers of Mathematics, Macmillan pubushing Company, NewYork, pp 575-596.

Martinez-Sierra, G. y García-González, M., (2014). High School students' emotional experiences in mathematics classes. Research in Mathematics Education, 16:3, 234-250.

Naranjo, M. L. (2009a). Motivación : perspectivas teóricas y algunas consideraciones de su importancia en el ámbito educativo, *Revista Educación* 33(2), 153-170.

Naranjo, M. L. (2009b). Una revisión teórica sobre el estrés y algunos aspectos relevantes de éste ámbito educativo, *Revista Educación* 33(2), 171-190.

Ortony, A, Clore, G. L., y Collins, A. (1988). *The Cognitive Structure of Emotions*. Cambridge University Press.

Palmero, F. y Martinez, F. Coordinadores (2008). *Motivación y Emoción*. Mc. Graw Hill. España.

Rodríguez, M y Bermúdez, R., (2001). *Psicología del pensamiento científico*. Ed. Pueblo y Educación. España.

Schoenfeld, A.H. (2007). Problem solving in the United States, 1970-2008: research and theory, practice and politics. *ZDM Mathematics Education* 39: 537-551

Obstáculos Cognitivos Asociados Con La Variación Y El Cambio

Miryán Trujillo Cedeño
Universidad de La Salle de Bogotá, Colombia.

Resumen

Este escrito presenta la relación entre gráficas cartesianas y obstáculos cognitivos asociados con la variación y el cambio. Con la intención de presentar de mostrar lla evidencia de esta relación, se hace una presentación desde los siguientes tópicos: manifestación del obstáculo, origen, ejemplos del mismo y superación. Esta relación fue un supuesto inicial que se confirmó desde la revisión del estado del arte de un proyecto iniciado en el programa de matemática educativa del CICATA. El estudio pretende mostrar cómo se argumenta con las gráficas, cuando se busca superar cognitivos referidos a la variación y al cambio en un ambiente de trabajo tecnológico. El estudio de los obstáculos se abordará desde la concepción de obstáculo de Brousseau y el papel de las gráficas desde el planteamiento de Roth . La metodología prevista para el diseño didáctico es la ingeniería didáctica que incluye cuatro fases: análisis preliminares, concepción y análisis *a priori*, experimentación y análisis *a posteriori.*

Palabras Clave: Obstáculos cognitivos, gráficas, variación y cambio.

1. Introducción

En el documento se presenta un avance de un proyecto de investigación, que muestra, desde la revisión del estado del arte, la relación entre las gráficas cartesianas y los obstáculos cognitivos la cual permite reafirmar la problemática de estudio.

Dado que la revisión ha permitido complementar la problemática de estudio, se ha considerado pertinente presentar el escrito en dos partes: En la primera se presenta una descripción del proyecto de investigación, haciendo alusión a lo siguiente: antecedentes y problemática, la investigación en sí y aspectos teóricos–metodológicos. La segunda, partiendo de la necesidad de afinar un supuesto fundamental inmerso dentro de la problemática -que es la relación entre las gráficas cartesianas y los obstáculos cognitivos- muestra al binomio: gráficas cartesianas-obstáculos cognitivos, dejándose entrever dos roles de dichas gráficas en esta relación: como activadoras de obstáculos y como mediadoras en la superación de los mismos.

Parte I

2. Antecedentes y problemática

El problema de investigación se plantea en torno a que en la comprensión de los conceptos del cálculo, considerado como la matemática de la variación y el cambio, los estudiantes enfrentan obstáculos; algunos son repetición de los observados en la historia y desafortunadamente nosotros, los responsables de orientar su aprendizaje, olvidamos las condiciones históricas en que se ha gestado el cambio conceptual, proceso que en muchos casos ha tomado largo tiempo. A la luz de investigaciones epistemológicas, –sobre los conceptos de función (Sierpinska, 1992; Álvarez y Delgado 2002), continuidad y límite (Cornu, 1981; Sierpinska, 1985; Delgado y Azcárate 1996; Delgado, 1998)– se revela que ciertos conocimientos de los alumnos obstaculizan la comprensión y enfatizan sobre la necesidad de tomarlos en consideración en el momento de planear y realizar la intervención didáctica. Esto es así, porque la comprensión se considera, “un acto implicado en un proceso de interpretación, siendo esta un desarrollo dialéctico entre conjeturas más y más elaboradas y validaciones de esas conjeturas.”(Sierpinska, 1990, p. 26). Estas investigaciones muestran que es inútil dejar de lado dichos obstáculos, por el contrario se deben identificar y preparar situaciones para que ellos se manifiesten y se superen.

3. La investigación

Se pretende hacer un estudio para identificar de qué manera la actividad que se puede generar con la ayuda de las gráficas, permite, posiblemente, crear condiciones que ayuden a superar algunos obstáculos cognitivos referidos a la variación y al cambio. Es decir, se procura estudiar cómo se argumenta con las gráficas, de tal manera que se explore la naturaleza del conocimiento matemático referido al pensamiento matemático y lenguaje variacional, cuando se busca superar obstáculos cognitivos referidos a la variación. Esta indagación, se pretende hacer a través del diseño de un ambiente tecnológico en donde, según Roth (2003) al tratar con las gráficas las tareas estarán encaminadas a lograr una adecuada lectura o interpretación de estas.

En este sentido el estudio a realizar estaría orientado a dar respuesta a la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo las gráficas pueden mediar en la superación de obstáculos cognitivos referidos a la variación y el cambio, en un ambiente de trabajo tecnológico?

4. Aspectos teórico- metodológicos

El tratamiento de los obstáculos epistemológicos referidos a la variación y al cambio, desde su concepción hasta la superación, estará soportado en Bachelard (1938) quien introdujo el término *"obstáculo epistemológico*":

> Es en términos de obstáculos que se debe plantear el problema del conocimiento científico. No se trata de considerar los obstáculos externos, como la complejidad y la fugacidad de los fenómenos ni de incriminar la debilidad de los sentidos y del espíritu humano: es en el acto mismo de conocer, íntimamente, que aparecen, por una clase de necesidad funcional, son lentos y son problema. Es aquí que se encuentran las causas del estancamiento y aún de la regresión, es aquí que hay que encontrar las causas de la inercia que es eso que llamamos obstáculo". (p. 15).

No obstante, éste término fue introducido por Brousseau (1983) en el campo de la didáctica, como –conocimiento intrínseco a la naturaleza del saber matemático que funciona en ciertos dominios pero que en otros resulta ineficaz y es fuente de errores, no es idiosincrásico, es resistente y difícil de modificar–. Siguiendo la idea de Delgado (1998), los obstáculos epistemológicos constituyen una subcategoría de una clase más amplia de obstáculos llamados *cognitivos* para indicar que se incluyen obstáculos de *origen ontogenético*–causados por ciertos funcionamientos automáticos del sistema cognitivo y no sólo por factores de maduración, que son compartidos por todo sujeto– y los de *origen didáctico* –resultado de transposiciones didácticas. El *obstáculo cognitivo* es un conocimiento que tiene dos aspectos, el primero, negativo ya que impide acceder al conocimiento nuevo y, el segundo, positivo porque la readaptación del conocimiento obstáculo a ciertas situaciones produce el conocimiento nuevo.

Para la inclusión del ambiente de trabajo tecnológico se están analizando los marcos de la Génesis Instrumental (Artigue, 2007) y la teoría sociocultural de la acción mediada de Werstch (1991) con el fin de decidir la integración de los dos o la exclusión de alguno dependiendo de la intencionalidad de las actividades que se planeen en el ambiente de trabajo. En la Génesis Instrumental se reflexiona sobre el uso de lo tecnológico y la dialéctica entre el trabajo conceptual y el trabajo técnico en la enseñanza de la matemática. En esta aproximación, la palabra instrumento tiene un sentido especial; surge de la construcción por parte del sujeto; es decir, ocurre una integración de la tecnología al sujeto. Para que esta construcción del artefacto al instrumento suceda, la génesis instrumental se debe apropiar de una dualidad producto del artefacto: la primera se dirige del sujeto hacia el artefacto cargándolo progresivamente de potencialidades; a este proceso se le llama la instrumentalización. La segunda dirección es del artefacto hacia el sujeto, lo que lleva al desarrollo y apropiación de esquemas de acción instrumentada que le permiten entender las potencialidades y restricciones (o limitaciones) del artefacto el cual constituyen progresivamente en técnicas, habilidades que admiten una respuesta efectiva a actividades matemáticas.

Por otro lado, la teoría sociocultural de la acción mediada indica que la acción típicamente humana emplea «instrumentos mediadores», tales como las herramientas o el lenguaje. Estos instrumentos mediadores dan forma a la acción de manera esencial y los actores buscan alcanzar la comprensión de la situación de acción y de sus planes de acción, con el objeto de coordinar sus acciones por medio del acuerdo. En este sentido Joyles (2005), realizó un estudio en donde analiza la forma como los estudiantes usan las herramientas computacionales para resolver problemas y cómo durante este proceso las ideas matemáticas involucradas son interiorizadas.

La metodología que abordará el problema a investigar y su solución, está basada en la denominada "*ingeniería didáctica*" (Artigue 1988), que incluye cuatro fases: Análisis preliminares, concepción y análisis *a priori*, experimentación y por último análisis *a posteriori*. Esta metodología es relevante en la investigación por cuanto se pretende hacer un diseño didáctico en donde los obstáculos se manifiesten desde el estudio de las gráficas en función de las tareas encaminadas a lograr una adecuada lectura o interpretación de las mismas.

Parte II

5. Relación entre gráficas cartesianas y obstáculos cognitivos

Con el fin de mostrar evidencias entre la relación, gráficas cartesianas y obstáculos cognitivos, se ha realizado una revisión bibliográfica que da cuenta de dicha relación. Se ha partido de la búsqueda de gráficas cartesianas que muestren sus roles de activadoras de obstáculos epistemológicos y de mediadoras en la superación. De igual forma desde la revisión se ha fijado la mirada en obstáculos epistemológicos que guarden relación con las gráficas cartesianas, haciendo una presentación en este escrito alrededor de los siguientes tópicos: manifestación del obstáculo, origen, ejemplos del mismo y superación.

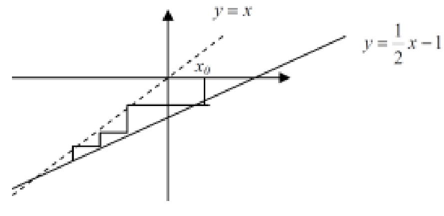
El obstáculo relacionado a continuación se ha elegido de una lista en la que Sierpinska (1992) trata el concepto de función, refiriéndose a su comprensión, desde el análisis de algunos aspectos epistemológicos y pedagógicos. Parte de la importancia de identificar los obstáculos epistemológicos asociados a dicho concepto desde sus orígenes. En aras de que se superen relaciona cuatro categorías de comprensión de un concepto matemático. En cuanto a los orígenes, distingue tres niveles: el de las actitudes creencias y convicciones, el de los esquemas de pensamiento -formas de aproximar problemas, interpretación de situaciones, cosas que son aprendidas por práctica e imitación en el curso de nuestra socialización y educación- y el último tiene que ver con el conocimiento técnico, entendido como aquel conocimiento explícito que reclama justificaciones racionales. Con relación a los actos de comprensión, se especifican cuatro categorías: **la identificación** de un objeto respecto a otros, **la discriminación**, **la generalización**, y por último **la síntesis**. En el intento de definir condiciones para la comprensión del concepto de función, Sierpinska relaciona obstáculos epistemológicos (OE) asociados con dicho concepto, entre los cuales el explicitado como sigue, muestra una relación con las gráficas cartesianas:

Manifestación del obstáculo: Observar los cambios como un fenómeno, tomando el foco de atención en cómo las cosas cambian ignorando qué cambia.

Origen: Está referido al nivel de los esquemas de pensamiento y parece haber sido común en la descripción de cambios y relaciones en el tiempo de Aristóteles, dado que en algunos de sus trabajos su atención parece centrarse en cómo las cosas pasan de un estado a otro pero sin estar interesado en las variables mismas. Algunos de los ejemplos de movimiento de cambio son: incremento y decrecimiento, rotación, maduración y vejez. Estos nombres describen la naturaleza del cambio como una variable que pasa de un posible valor a otro.

A continuación se presentan dos ejemplos del obstáculo en mención manifestado a través de las gráficas cartesianas:

Ejemplo de Sierpinska: En un experimento, en donde se pretende que los estudiantes identifiquen el proceso de iteración de una función en su representación gráfica y dinámica, (ver gráfica 1), se analiza que:

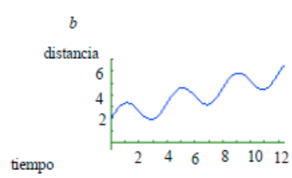


Gráfica 1. (Tomada de Sierpiska, 1992)

Cuando se observa el desplazamiento del punto (*x, f*(*x*)) a lo largo de la gráfica, los estudiantes concentran su atención en el desplazamiento mismo, sobre el cambio, despreocupándose de lo que está siendo desplazado o padeciendo el cambio. Ellos se interesaron en la forma de la trayectoria del desplazamiento (espiral o en escalera), sólo muy tarde en el experimento algunos estudiantes identificaron los términos de una sucesión como los objetos que son tomados bajo escrutinio. (Sierpinska, 1992, p. 33).

En la situación anterior, se observa que la atención, de los estudiantes, está centrada, en cómo las cosas cambian, ignorando qué cambia. En este caso, la gráfica está tomando el rol de activadora del obstáculo.

Ejemplo de Buendía y Ordoñez: En una experiencia relacionada en Buendía (2006), se le preguntaba a profesores y estudiantes, refiriéndose a la gráfica 2:



Gráfica 2. (Tomada de Buendía, 2006)

¿Es la gráfica de una función periódica?

Respuesta del profesor: …es periódica porque es senoidal y porque va subiendo de dos en dos.

Esto muestra que lo periódico está asociado con ver el cambio en una gráfica, el profesor pone la atención en cómo cambia la gráfica (se repite), pero no en qué cambia, dado que lo que está indicando como periódico no es la gráfica en sí o el movimiento en sí sino su variación: esto se sustenta porque la derivada de esta gráfica o bien la velocidad de ese movimiento, es periódica según lo reportan Buendía y Ordoñez (2009), al hacer un análisis de una función y sus derivadas para funciones periódicas. En esta gráfica, los alumnos (y profesores), sí ven el cambio pero el cambio que sea; es decir con que algo sea repetitivo, ya la gráfica es periódica. Entonces, ven el cambio pero no ven qué cambia. Aquí se puede ver a la gráfica, igual que en el ejemplo anterior, activando el obstáculo.

Por otro lado, en esta gráfica el comportamiento de la variable x (o tiempo) efectivamente es periódico, y el de la y (distancia) no lo es, en ecuaciones diferenciales eso lo llaman cuasi-periódico y el darse cuenta de este doble comportamiento y al mismo tiempo poderlos unir, resulta esencial para distinguir una función periódica de otra que no lo es. Desde el análisis de lo periódico se afirma que, cuando se proponen intencionalmente prácticas de predicción sobre estas gráficas, queda favorecido ese análisis dual, lo cual permite hacer una distinción significativa entre el qué se repite y el cómo se repite. (Buendía y Ordoñez, 2009, p.12).

Esta afirmación de la Socioepistemología –teoría que parte considerando el carácter social de la matemática– está en relación con una de las categorías de los actos de comprensión descritos por Sierpinska (1992) al referirse a la superación de obstáculos epistemológicos, a través del favorecimiento dichos actos de comprensión: **la identificación** de un objeto respecto a otros.

Se puede concluir entonces que además de que las gráficas cartesianas activan obstáculos epistemológicos, lo cual se evidencia en los ejemplos anteriores, también las gráficas pueden mediar en la superación de los mismos dado que al proponerse prácticas de predicción sobre las gráficas como la de la figura 2, con el fin de distinguir entre el qué se repite y cómo se repite.

Superación del obstáculo: Sierpinska (1992), propone tener en cuenta dentro de la superación de este obstáculo, el favorecimiento del siguiente acto de comprensión C:

C: Identificación de los sujetos del cambio en el estudio de los cambios

Desde la Socioepistemología de lo periódico, la predicción hace que sí se considere no sólo que algo se está repitiendo sino cómo y qué se está repitiendo. Lo que indica que por lo menos desde las prácticas de predicción sobre ciertas gráficas cartesianas, se pueden ver a las mismas como mediadoras en la superación del obstáculo (OE): Observar los cambios como un fenómeno, tomando el foco de atención en cómo las cosas cambian ignorando qué cambia. En conclusión la superación del obstáculo en mención, se puede abordar por medio de la práctica de predicción ya que se pone atención en las componentes de la gráfica cartesiana (eje x, eje y) por separado y en conjunto.

Referencias

Álvarez, J., Delgado, C. (2002). The Tall-Vinner Problem. An Operative Reformulation. *Proceedings of 26th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*.1,261-269.

Artigue, M (1988). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 9(3): 281-308. Traducción al castellano de César Delgado G. Documento interno. Univalle, Cali, Colombia.

Artigue, M. (2007). Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportaciones de la aproximación instrumental. En Mancera E. y Pérez C. (Eds.) *Memorias de la XII Interamericana de Educación Matemática*. 12, 9-21.

Bachelard, G. (1938). La formation de l'esprit scientifique. Contribution à une psychanalyse de la connaissance objective. Paris: PUF. Traducción al castellano: La formación del Espíritu científico. Contribución a un psicoanálisis del conocimiento objetivo. Siglo XXI. Buenos Aires. Argentina. 1990.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles epistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des mathématiques* 4(2):165-198. Traducción al castellano de César Delgado G. documento interno, Univalle. Cali. Colombia.

Buendía, G. (2006). Una socioepistemología del aspecto periódico de las funciones. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 9 (2): 227-252

Buendía, G y Ordoñez, A. (2009). El comportamiento periódico en la relación de una función y sus derivada: significados a partir de la variación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 12(1): 7-28.

Cornu, B. (1981). Apprentissage de la Notion de Limite: Modèles Spontanés et Modèles Propres'. En: Comiti, C. & Vergnaud, G. (Eds), *Proceedings of the Fifth conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education:* 322-329.

Delgado, C. Azcárate, C. (1996). Study on the evolution of graduate students concept images while learning the notions of limit and continuity. *Proceedings of 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* 2: 289-296.

Delgado, C. (1998). *Estudio microgenético de esquemas conceptuales asociados a definiciones de límite y continuidad en universitarios de primer curso*. (Tesis Doctoral). Universidad Autónoma de Barcelona. España.

Hoyles, C. (2005). Making and sharing mathematics. Two paths to co-constructing meaning. *Meaning in Mathematics Education*. Springer. Estados unidos: 129-139.

Roth, W.M. (2003). *Toward Anthropology of Graphing*. *Semiotic and Activity-Theoretic Perspectives*. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles Épistémologiques Relatifs à la Notion de Limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 6(1): 5-67. Traducción al castellano de César Delgado G. Documento interno, Univalle. Cali. Colombia.

Sierpinska, A (1990). Some remarks on understanding in mathematics**.** *For the Learning of mathematics***,** 10(3): 24-36. Traducción al Castellano César Delgado G. Documento interno, Univalle. Cali. Colombia : 25-37.

Sierpinska, A (1992). Sobre la noción de la comprensión de función. En Dubinsky, E. & Hareld, G. (eds.), *The concept of function: Some Aspects of Epistemology and Pedagogy, MAA Notes* 25: 25-58. Mathematical Association of America, Washington, DC, 1992. Traducción al castellano de César Delgado G. Documento interno, Univalle. Cali. Colombia.

Werstch, J (1991). *Voces de la mente*. *Un enfoque sociocultaral para el estudio de la acción mediada*.

Los Saberes Matemáticos Cotidianos Y Funcionales En El Conocimiento Del Profesor

Hugo Parra-Sandoval
Universidad del Zulia
Maracaibo - Venezuela
hugoparras@hdes.luz.du.ve

Resumen

La literatura acerca del conocimiento del profesor centra su atención y desarrolla con detenimiento todo lo relacionado con el conocimiento matemático institucionalizado en el marco del conocimiento didáctico del contenido; ejemplo de lo mencionado son los trabajos de Ball, Thames y Phelps (2008); Godino (2009); Ponte (2012) y Aguilar; Carreño; Carrillo; Climent; Contreras; Escudero; Flores; Flores; Montes & Rojas (2013). Sin embargo existe conocimientos matemáticos no institucionalizado que la institución escolar no los reconoce y en caso del conocimiento didáctico del contenido tampoco es considerado. Sin embargo es un conocimiento que existe y se hace uso de él. De alguna manera hay una práctica social de ese conocimiento que se deja de lado. En la exposición que planteamos iniciaremos aclarando las características de este tipo de conocimiento no institucionalizado y luego expondremos el lugar que debería ocupar este tipo de conocimiento en el marco del conocimiento didáctico de contenido.

La tradición positivista marca una diferencia entre conocimiento científico y aquel que no lo es (Martínez, 2006) El conocimiento científico desde la perspectiva positivista se caracteriza por considerarlo como un conocimiento acabado y definitivo, independiente de los contextos, generalizable, lógico y razonado; producto de la observación sistemática (Vazquez & Manassero, 1999). En el caso de la matemática hallamos el término "saber sabio" trabajado por Chevallard (1985). El autor indica que el saber sabio se concibe como un corpus de conocimientos novedoso, producido y reconocido como pertinente y válido por la comunidad académica de matemáticos. Este saber sabio, que denominaremos de ahora en adelante conocimiento matemático institucionalizado, tiene como espacio privilegiado para su difusión las instituciones educativas. En ese contexto de la cultura escolar los profesores y estudiantes reconocen en él un conocimiento que ha de aceptarse y ser reconocido como el único verdadero, así lo corrobora por ejemplo, una investigación realizada a una muestra de jóvenes estudiantes de la secundaria en Venezuela. Ellos identificaban a la matemática como un cuerpo de conocimientos acabado, estructurado lógicamente (Parra, Hurtado, Méndez, Noguera, Borjas, 2014).

El monopolio del conocimiento matemático institucionalizado es indudable en el contexto escolar. Sin embargo hay que reconocer que existen otros conocimientos matemáticos que la institución escolar ignora aunque sea utilizado por todos o por grupos específicos. En el caso del conocimiento matemático utilizado por el común de la gente, nos referimos al conocimiento cotidiano. Este conocimiento se caracteriza por ser intuitivo y tienen su origen en la experiencia, resolviendo situaciones que son del común de las grandes mayorías (Martínez, 2006). Este conocimiento lo podemos reconocer por ejemplo, en los procesos de medición y conteo. Junto a este conocimiento cotidiano hallamos también el denominado "funcional". Éste se caracteriza por responder a necesidades muy específicas de una comunidad en particular (Tuyub & Cantoral, 2008) y de alguna manera le sirve a esa comunidad de prácticos para ejercer un "control de su mundo" (Biggs y Tang, 2009). El conocimiento funcional está estrechamente relacionado con la experiencia, porque su finalidad es la de resolver problemas. Se transmite por vía de la oralidad (es declarativo) y es flexible, adecuándose a las circunstancias. Un aspecto relevante es que el conocimiento funcional es reflexivo en el momento propio de la actividad (reflexión en la práctica), pero por lo general una vez culminada la tarea no se reflexiona sobre ella (reflexión sobre la práctica). Ejemplo de conocimiento funcional lo hallamos en comunidades que desarrollan un oficio determinado, comunidad de prácticos como la de los albañiles o en comunidades locales como las indígenas o niños trabajadores de la calle. También lo hallamos en comunidades de profesionales como médicos, toxicólogos (Tuyub & Cantoral, 2008) e ingenieros. No se trata de una matemática diferente, sino de unos procesos y usos diferentes de las matemáticas.

Si estos tipos de conocimiento existen ¿por qué no considerarlos en el proceso de formación de profesores de manera que desarrollen suficientes competencias que permitan su incorporación en el ámbito escolar?

Referencias

Aguilar, A., Carreño, E., Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L., Escudero, D., Flores, E., Flores, P., Montes, M., Rojas, N. (2013) El conocimiento especializado del profesor de matemáticas: MTSK. Actas del VII CIBEM. 5063 – 5069

Ball, Deborah Loewenberg, Thames, Mark Hoover and Phelps, Geoffrey. Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? Journal of Teacher Education. 59(5), 389-407

Biggs, J., & Tang, C. (2009). Teaching for quality learning at university (3rd ed.). New York: McGraw Hill.

Chevallard Yves, La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné, Grenoble, La pensée sauvage, 1985.

Godino, Juan (2009) Categorías de Análisis de los conocimientos del Profesor de Matemáticas. Revista UNIÓN. 20, 13-31

Martínez, M. 2006. Conocimiento Científico General y Conocimiento Ordinario Cinta Moebio 27: 1-10 www.moebio.uchile.cl/27/martinez.html

Parra-Sandoval, Hugo; Hurtado, Claudio; Méndez, Eduardo; Noguera, Williana; Borjas, Beatriz (2014) Percepción del estudiantado de Educación Media en relación a las Ciencias Naturales y la Matemática. Ministerio del Poder Popular para la Educación – del Centro de Formación e Investigación Padre Joaquín - Fe y Alegría. Caracas. Venezuela. Informe no publicado

Tuyub Sánchez, Isabel; Cantoral, Ricardo (Construcción Social del Conocimiento Matemático durante la Obtención de Genes en una Práctica Toxicológica. Bolema, Rio Claro (SP). 26 (42ª), 311-328

Vázquez Alonso, Ángel y Manassero Mas, María Antonia (1999) Características del conocimiento científico: creencias de los estudiantes. Enseñanza de las Ciencias. 17 (3), 377-395

Las Conexiones Entre Las Derivadas Sucesivas De Una Función: Un Estudio Exploratorio Sobre La Existencia De Matices En La Tematización Del Esquema De La Derivada

C. Fuentealba, E. Badillo, G. Sánchez-Matamoros
Universidad Austral de Chile, Universidad Autónoma de Barcelona, Universidad de Sevilla
cfuentealba@uach.cl, Edelmira.Badillo@uab.cat, gsanchezmatamoros@us.es

Resumen

Esta comunicación es parte de un trabajo más extenso que aborda la comprensión del concepto de derivada en estudiantes universitarios con instrucción previa en cálculo diferencial. Por una parte, consideramos los elementos teóricos propuestos por la teoría APOE en relación a la tematización de un esquema y por otra, la configuración del concepto de derivada que se caracteriza por: los elementos matemáticos, las relaciones lógicas y los modos de representación que los estudiantes utilizan al resolver una tarea. Los resultados sugieren que tematizar el esquema de la derivada es difícil de lograr y que además, existen matices entre quienes lo consiguen, observándose diferencias en las conexiones entre las derivadas sucesivas de una función.

Palabras clave: derivada, esquema de derivada, tematización, derivadas sucesivas

Introducción

El concepto de derivada, es sin lugar a duda, uno de los elementos fundamentales y estructurantes de cualquier curso de cálculo o análisis matemático. Nadie discute su importancia y es por ello que está incluido en los currículos tanto de matemáticas como del área científica. Sin embargo, a pesar de la importancia del cálculo, un problema aún sin solución es cómo lograr el aprendizaje por parte de los estudiantes de la diferenciación o la integración que corresponden a los conceptos fundamentales de este curso. Según Artigue (1995) la enseñanza tradicional, en particular, la enseñanza universitaria, aunque tiene otras ambiciones, tiende a centrarse en una práctica algorítmica y algebraica del cálculo evaluando en esencia las competencias adquiridas en este dominio. Este hecho ha provocado que un gran número de estudiantes prefieran utilizar dichas técnicas para resolver las tareas que se les proponen, lo cual generalmente no los lleva a un camino óptimo de resolución. De esta forma, a pesar de que el concepto de derivada posee una amplia gama de aplicaciones en distintas disciplinas científicas, su comprensión por parte de los estudiantes resulta ser un reto cognitivo.

La complejidad presente en la comprensión del concepto de derivada ha sido motivo de numerosas investigaciones que han abordado la problemática desde diversos planteamientos teóricos aportando información que ha tenido consecuencias positivas en el desarrollo del currículo de cálculo y específicamente sobre el concepto de derivada. Sin embargo, se hace necesario ahondar en la compresión que los estudiantes construyen del concepto, una vez acabado un proceso de instrucción.

Marco Teórico

Este trabajo considera los aportes teóricos planteados por la Teoría APOE (Arnon et al., 2014; Asiala et al., 1997), los cuales permiten describir tanto el camino como la construcción de las estructuras cognitivas lógico-matemáticas realizadas por un individuo durante el proceso de aprendizaje de un concepto matemático. En este marco se considera que el principal mecanismo de construcción de conocimiento matemático es la abstracción reflexiva y que la comprensión de un concepto por parte de un estudiante comienza con la manipulación de los objetos físicos o mentales previamente construidos en términos de acciones. Las acciones se interiorizan para formar procesos que se encapsulan para formar objetos. Finalmente, las acciones, los procesos y los objetos se pueden organizar en esquemas (Dubinsky, 1991). Los esquemas corresponden a la colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que están relacionados consciente o inconscientemente en la mente de un individuo en una estructura coherente y que pueden ser empleados en la solución de una situación problemática que involucre esa área de las matemáticas (Asiala et al., 1997). En relación a los esquemas, Piaget y García (1983, 1989) indican que estos crecen según ciertos mecanismos y se desarrollan o evolucionan pasando por tres niveles, intra-inter-trans, denominado tríada que se suceden según un orden fijo, caracterizándose por el grado de construcción de relaciones entre los elementos matemáticos constitutivos del concepto. En este sentido, Trigueros (2005) indica que cuando un sujeto se encuentra frente a un problema específico en el ámbito de las matemáticas, evoca un esquema para tratarlo. Al hacerlo, pone en juego aquellos conceptos de los que dispone en ese momento y utiliza relaciones entre estos. Ante una misma situación, diferentes estudiantes, utilizan los mismos conceptos y diferentes relaciones entre ellos.

Para el objetivo de nuestro estudio consideramos los aportes de la Teoría APOE relacionados con la tematización de un esquema, la cual según Cooley, Trigueros y Baker (2007) implica la coherencia del esquema, es decir, la posibilidad de que el sujeto reconozca las relaciones que están incluidas en el esquema y sea capaz de decidir qué problema puede resolverse utilizando el esquema y cuál no. En este mismo sentido y en relación a la tematización del esquema de la derivada consideramos, por una parte, los aportes realizados por Baker, Cooley y Trigueros (2000) que indican que la tematización puede observarse cuando un estudiante es capaz de movilizar las relaciones lógicas entre los elementos matemáticos a una situación nueva y, por otra, los resultados de García, Llinares y Sánchez-Matamoros (2011) que mencionan que la tematización del esquema de la derivada se evidencia en las estructuras subyacentes que se observan cuando un estudiante es capaz de transferir todas las relaciones e implicaciones que ha construido y organizado para el par (f, f') al par (f', f''), y así sucesivamente.

Metodología

Los participantes de este estudio correspondieron a 25 estudiantes universitarios, los cuales habían cursado y aprobado, por lo menos una asignatura de cálculo diferencial.

El primer instrumento aplicado correspondió a un cuestionario que estaba conformado por tres tareas sobre la comprensión del concepto de derivada, dichas tareas tenían como base estudios previos relacionados con el concepto (Baker et al., 2000; Cooley et al., 2007; García et al., 2011). La resolución de las tareas del cuestionario involucraba el uso de los elementos que configuran el concepto de derivada (Tabla 1).

Tabla 1. Descripción de los elementos necesarios para responder cada una de las tareas propuestas

Tarea 1	*Modo de representación*: analítico →gráfico *Elementos matemáticos*: Interpretación analítica de la derivada y sus implicaciones sobre la gráfica de la función (existencia de valores extremos, puntos de inflexión). Signo de la primera derivada y su relación con respecto a los intervalos de monotonía de la función. Signo de la segunda derivada y su relación con respecto a los intervalos de convexidad de la función. *Relaciones lógicas*: Conjunción, contrarrecíproco y equivalencia.
Tarea 2	*Modo de representación*: gráfico→ analítico → gráfico *Elementos matemáticos*: Interpretación geométrica y analítica de la derivada (existencia de valores extremos, puntos de inflexión, discontinuidades y picos). Intervalos de monotonía y convexidad de la función y su relación con el signo de la primera derivada o segunda derivada según sea el caso. El operador derivada (si f es una parábola entonces f' es una recta). *Relaciones lógicas:* Conjunción, contrarrecíproco y equivalencia.
Tarea 3	*Modo de representación*: gráfico → analítico → gráfico *Elementos matemáticos*: Interpretación geométrica (existencia de valores extremos, puntos de inflexión, discontinuidades y picos). Intervalos de

monotonía de la primera derivada y su relación con el signo de la segunda derivada (intervalos de convexidad de la función). Intervalos de cambio de signo de la primera derivada y su relación con respecto a la monotonía de función.

Relaciones lógicas: Conjunción, contrarrecíproco y equivalencia.

A modo de ejemplo, presentamos la primera y la tercera tarea del cuestionario propuesto a los estudiantes. Como se observa en la Figura 1, se entrega información analítica de la función f en términos de f' y f'', a partir de ello se les solicita a los estudiantes esbozar la gráfica de la función f. Uno de los objetivos de esta tarea fue observar si los estudiantes eran capaces de establecer las relaciones tanto puntuales como globales que asocian: el signo de f' en un intervalo con la monotonía de f en dicho intervalo, el signo de f'' en un intervalo con la concavidad de f en el intervalo y los ceros de f' con la posible existencia de valores extremos o puntos de inflexión. Por otra parte, se pretende observar si los estudiantes eran capaces identificar las contradicciones presentes en las condiciones analíticas entregadas y además, plantear una modificación que les permita dar una solución adecuada de la tarea mostrando de esta forma coordinación de los elementos matemáticos entregados a través de las relaciones lógicas.

Esboza la gráfica de una función f que satisface las siguientes condiciones:

a) f es continua en su dominio

b) $f(2)=0$

c) $f'(3)=f'(5)=0$

d) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-4$

e) $\lim_{x\to 8^-} f(x)=-\infty$

f) $f'(x)<0$ cuando $5<x<8$

g) $f'(x)\geq 0$ cuando $x<5$

h) $f''(x)<0$ cuando $3<x<8$

i) $f''(x)>0$ cuando $x<3$

Figura 1. Enunciado de la Tarea N°1 del cuestionario

En la tercera tarea presentada en modo gráfico (Figura 2), se les solicitó a los estudiantes, construir el gráfico de f a partir de la gráfica de f', donde la gráfica de f' muestra: variados cambios de signo, crecimiento, ceros, puntos de tangencia horizontal y un punto anguloso. El objetivo de la tarea fue observar si los estudiantes eran capaces de establecer las relaciones lógicas que vinculan: el crecimiento de f' con la convexidad de f, el signo de f' con la monotonía de f, los ceros y valores extremos de f' con los valores extremos y puntos de inflexión de f. Lo importante de la tarea se relaciona con la capacidad de los estudiantes para vincular f' con f, ya que necesariamente debe analizarse que sucede con f'', por lo tanto, debe considerarse a f' como una función y a f'' como su derivada.

La figura muestra la gráfica de la derivada de f, esboza las posibles gráficas de f.

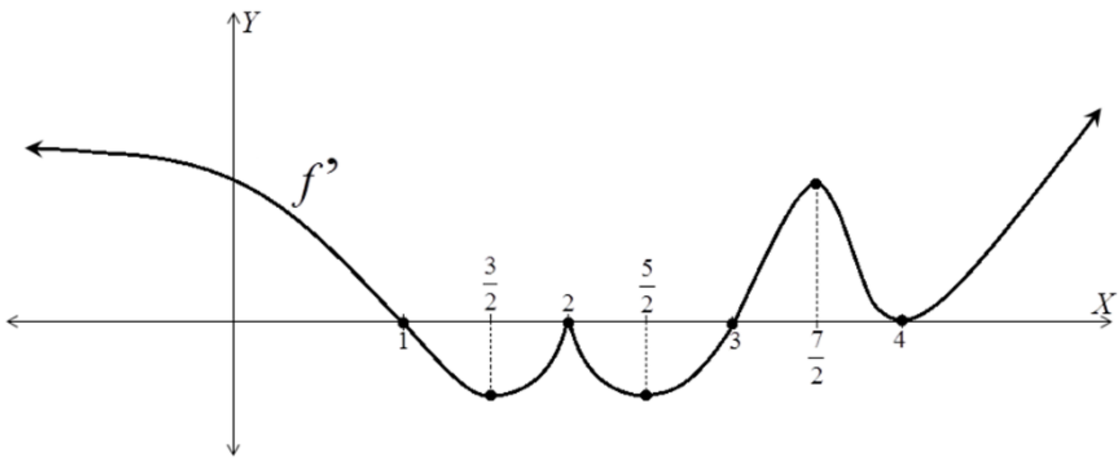


Figura 2. Enunciado de la Tarea N°3 del cuestionario

A partir del análisis de los protocolos de resolución que obtuvimos del primer instrumento y tomando en consideración la descripción de los niveles descritos por Sánchez-Matamoros, García y Llinares (2006) logramos clasificar a los estudiantes en distintos niveles de comprensión del esquema de la derivada (intra-inter-trans). Por otra parte, este primer instrumento nos proporcionó información necesaria para la elaboración del segundo instrumento que fue aplicado a los estudiantes que poseían un nivel trans de comprensión del concepto y que posiblemente habían logrado tematizar el esquema. Este segundo instrumento correspondieron a entrevistas clínicas que tuvieron dos finalidades: (i) profundizar en el proceso de resolución de las tareas del cuestionario e (ii) indagar en las posibles manifestaciones y diferencias de la tematización del esquema. Estas entrevistas clínicas estaban conformadas por dos tipos de preguntas (Tabla 2), las primeras se relacionaban con modificaciones de las condiciones de las tareas propuestas en el cuestionario, con el fin de identificar si los estudiantes eran capaces de movilizar las relaciones lógicas entre los elementos matemáticos a una situación nueva. Por su parte, el segundo tipo de interrogantes buscaba encontrar evidencia empírica referente a la tematización del esquema y a las relaciones que los estudiantes establecían entre las derivadas sucesivas de una función.

Tabla 2. Algunas de las preguntas planteadas en las entrevistas asociadas a cada una de las tareas propuestas en el cuestionario

Tarea	Pregunta
1	¿Existe algún cambio significativo en la gráfica de la función si eliminamos la condición c?
2	Al modificar la condición de que la gráfica dada es la de la función derivada y no la de la función ¿Qué pasa en los puntos $x=7$, $x=10$ y $x=14$?
3	Explica cómo interpretas la información de x_0. ¿Qué puedes decir sobre las derivadas sucesivas derivadas sucesivas (f', f'' y f''') en $x=1$, $x=3$ y x_0? Justifícalo. (x_0 era un punto de inflexión de la primera derivada)

Análisis Y Resultados

Como primer paso realizamos un análisis de las respuestas de los 25 estudiantes a cada una de las tareas propuestas del cuestionario considerando como criterio de selección, la completitud de cada una de las tareas y del cuestionario en general. A partir de este análisis redujimos el número de sujetos de estudio a nueve casos los que clasificamos en los distintos niveles comprensión del esquema. Posteriormente, nos centramos en el análisis de tres estudiantes que denominamos A1, A3 y A4 los cuales fueron clasificados en un nivel de comprensión trans del esquema y manifestaban características que nos permitían inferir una posible tematización del mismo, a ellos les aplicamos las entrevistas clínicas. Con la información obtenida por medio del cuestionario y las entrevistas clínicas logramos observar que los estudiantes que habían tematizado el esquema muestran coherencia y flexibilidad del esquema al responder y argumentar correctamente a las modificaciones de las condiciones de las tareas, y además demostraban su capacidad de coordinación de los elementos matemáticos puntuales y globales entregados en la Tarea N°1, lo cual les permitió apreciar la contradicción presente en las condiciones analíticas y modificar la tarea con el propósito de resolverla correctamente. Lo anterior, es un indicador de la coordinación de los elementos matemáticos correspondientes a un segundo nivel, es decir, al par (f', f''). Esto es un elemento diferenciador de los estudiantes con el esquema tematizado, pues el coordinar solo los elementos matemáticos puntuales y globales en un primer nivel correspondiente al par (f, f') también podía llevar a la resolución correcta de la tarea, al no considerar las implicaciones geométricas de las condiciones entregadas. Para ilustrar lo anterior se presenta, a modo de ejemplo, un fragmento la tercera entrevista del estudiante A1 y otro del estudiante A4.

Fragmento de entrevista del estudiante A1

E: ¿Qué es creciente por $x < 3$?

A1: La derivada primera. Es creciente por $x < 3$ porque la derivada segunda es estrictamente positiva. Es estrictamente creciente. Es positiva por aquí (indicando a la izquierda de $x = 3$) tiene un máximo en el tres, que estará por aquí (indicando en $x = 3$)

E: ¿Quién tiene un máximo en el tres?

A1: La derivada primera tiene un máximo en el tres.

E: Ah, vale.

A1: Porque la derivada segunda cambia de signo, de positivo a negativo. Por lo tanto, pasa de crecer a decrecer.

E: ¿Y éste es el argumento que tú utilizas para decir que no puede ser cero la derivada en tres?

A1: Sí porque, por aquí es positiva y va creciendo (indicando a la izquierda de $x=3$). Por lo tanto, no puede cortar aquí, o sea no es posible.

Fragmento de entrevista del estudiante A4

A4: Es decir, el problema que tengo yo es que las condiciones “i” y “g” me están diciendo que la derivada tiene que ser creciente, pero a la vez positiva e ir a cero por otras condiciones anteriores, como la “c” creo (indicando a la izquierda de $x=3$).

E: ¿Por cuál tiene que ser positiva? Por la “g” ¿y qué significa que la derivada sea positiva? ¿cómo está su gráfico entonces?

A4: Está por encima del eje, de todos modos tiene que, la gráfica tiene que ir hacia el cero desde un punto positivo (indicando a la izquierda de $x=3$), pero a la vez tiene que ser creciente, lo cual es absolutamente imposible. Y el mismo problema está con la condición “h” y la condición “g” tiene que ser positiva, pero a la vez tiene que bajar, con lo cual, si estas en cero y tienes que ir a un punto positivo, tienes que subir, pero aquí te está diciendo que tienes que bajar, lo cual es imposible (indicando a la derecha de $x=3$). Con lo cual “i” y “h” se contradicen con la “g”.

Como se observa, tanto el estudiante A1 como el estudiante A4 establecen conexiones entre los elementos matemáticos que vinculan el signo de f'' con la monotonía y signo de f'. De esta forma, son capaces de observar la contradicción entre los elementos matemáticos globales y el puntual correspondiente a $f'(3)=0$.

Por otra parte, observamos diferencias entre los estudiantes que habían tematizado el esquema en cuanto al uso que hacían de las derivadas sucesivas mostrando diferencias en la forma de establecer y argumentar dichas relaciones, lo cual nos permitió definir tres tipos de conexiones relacionadas con las derivadas sucesivas de una función (Tabla 3), las cuales hemos denominado como conexiones: inicial, intermedia y avanzada.

Tabla 3. Conexiones entre las derivadas sucesivas de una función establecidas por estudiantes con el esquema de derivada tematizado

Conexión	Descripción
Inicial	Logra establecer conexiones entre; la función, la primera y segunda derivada.
Indirecta	Establece conexiones entre; la función, la primera, la segunda y tercera derivada haciendo uso de una función auxiliar ($F = f'$).
Directa	Establece directamente las conexiones entre; la función, la primera, la segunda y tercera derivada.

A modo de ejemplo, presentamos un fragmento de la entrevista al estudiante A4 que muestra evidencia de una conexión de tipo indirecta.

E: Ese punto x_0 que está ahí que correspondería a punto de inflexión de la primera derivada, porque estaría cambiando de concavidad, no es cierto ¿Qué cosas podrías decir sobre este punto x_0 con respecto a la segunda derivada o la tercera derivada?

A4: Ah, si cogemos la función ésta como la función normal digamos […].

E: O sea ¿cómo es eso de la función normal? Estás tomando que ésta…

A4: Sí eso es F ya no es f', le llamo F.

E: La estás llamando F, ok.

A4: Porque puedo llamarla así, básicamente. Con lo cual ahora, yo estoy hablando de un punto de inflexión normal, en la función primitiva, simplemente es un punto de inflexión. Me indica que la segunda derivada será cero.

E: ¿Pero tú segunda derivada sería…?

A4: La tercera derivada.

E: ¿Sería la tercera derivada?

A4: Sí, si yo digo que F, digamos f' la llamo F, con lo cual $f^{(n)} = F^{(n-1)}$, me voy ahí, y yo trabajo con la función que estoy acostumbrado y no cambio funciones, me es más fácil así.

Conclusiones

Hemos encontrado evidencias que los estudiantes con el esquema tematizado muestran coherencia y flexibilidad en el uso de los elementos matemáticos que conectan la función, la primera y segunda derivada, tanto en las relaciones directas como contrarias. Sin embargo, observamos diferencias en cuanto al establecimiento de estas conexiones con la tercera derivada, ya que mientras un estudiante solo logra establecer las relaciones entre la función, la primera y segunda derivadas; otro es capaz de hacer uso directo de ellas; mientras que un tercer estudiante para hacer uso de la tercera derivada, necesita referirse a una función auxiliar F que hace corresponder con f' y partir de las conexiones entre F, F' y F'' resuelve las tareas trasladando sus respuestas a f, f', f'' o f'''. Lo anterior, pone de manifiesto que el establecimiento de conexiones entre las derivadas sucesivas, en los estudiantes con el esquema tematizado, no es directo como podría inferirse e incluso se evidencia la existencia de matices entre dichas conexiones.

Finalmente, los resultados indican que lograr tematizar el esquema de la derivada, luego de finalizado un proceso de instrucción, no es fácil, lo cual queda de manifiesto en que lograron tematizar solo 3 de un total de 25 estudiantes con instrucción previa en cálculo diferencial.

Referencias

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M.,Weller, K. (2014). *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Springer.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D., Thomas, K. (1997). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. *MAA NOTES*, 37–54.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp.97-140). México: Grupo Editorial Iberoamericano.

Baker, B., Cooley, L., y Trigueros, M. (2000). A Calculus Graphing Schema. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*(5), 557-578.

Cooley, L., Trigueros, M., & Baker, B. (2007). Schema thematization: a framework and an example. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(4), 370-392.

Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking,* 95–123.

García, M., Llinares, S., y Sánchez-Matamoros, G. (2011). Characterizing thematized derivative schema by the underlying emergent structures. *International journal of science and mathematics education*, *9*(5), 1023-1045.

Piaget, J., y García, R. (1983, 1989). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. México, España, Argentina, Colombia (Madrid): Siglo veintiuno editores, S.A.

Sánchez-Matamoros, G., García, M., y Llinares, S. (2006). El desarrollo del esquema de derivada. *Enseñanza de Las Ciencias*, *24*(1), 85–98.

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación Matemática*, *17*(1), 5–31.

Álgebra Escolar: Una Revisión Preliminar En Relación A Errores Y Dificultades

Nicolás Sánchez Acevedo, María del Valle Leo
nicolas1983@gmail.com, mdelvall@udec.cl
Universidad Academia Humanismo Cristiano, Universidad de Concepción

Resumen

Los años de educación formal reportan que la enseñanza y aprendizaje de la Matemática trae consigo muchas dificultades al ser tratadas. Se ha transformado en objeto de investigación explorar el origen de estos motivos por diversos investigadores, encontrándose que pueden ser de origen epistemológico, cognitivo y didáctico. No necesariamente todos de forma dependiente. El álgebra por su naturaleza simbólica es un área que reporta diversidad de dificultades provocando errores desde que los estudiantes inician la interacción con ésta. Las causas son múltiples, tratamiento inadecuado de los símbolos, generalización aritmético-algebraica, el álgebra como proceso de operacionalización, falta de comprensión por quien la enseña, uso inadecuado del lenguaje, ausencia en el desarrollo abstracto de estudiantes, etc. Tomando en cuenta estos múltiples aspectos es posible proponer estrategias que releven el uso de errores como instrumento estratégico del aprendizaje y no como un castigo evaluativo. Este trabajo se inscribe dentro de la línea de didáctica del álgebra. Se presenta una caracterización del pensamiento algebraico, el cual permite de alguna manera caracterizar dificultades y errores en el desarrollo de tareas en el nivel escolar y estudiantes para profesores. Finalmente se entregan algunas conclusiones y reflexiones futuras para enmarcar en el desarrollo profesional de profesores en ejercicio.

Palabras clave: pensamiento algebraico, errores y dificultades, tareas algebraicas

Introducción

La actividad matemática es uno de los ámbitos, que aunque suene trivial, es básico y necesario en la formación de todo ciudadano. Poder adquirir un conocimiento matemático útil y situado requiere del manejo de habilidades mínimas y necesarias, tanto conceptuales como procedimentales. Esto necesariamente constituye una herramienta en los ciudadanos para la solución de problemas y para el desarrollo de sus capacidades de razonamiento (Franchi, Bohórquez, Hernández y Medina, 2011). Con ello se hace necesario y justificable que los niños se inician en el estudio formal de esta disciplina desde los primeros cursos en su ciclo educativo.

La complejidad a la que se ve expuesta la matemática, dado su carácter, - muchas veces descontextualizado-, limita los procesos naturales y útiles que puede tener esta. Dichos obstáculos están insertos en el espacio aula, donde la interacción profesor estudiante muchas veces se ve limitada debido a la ausencia de elementos sociales, culturales, científicos, individuales, grupales, afectivos, contextuales, institucionales y/o económicos que hacen de la matemática una fusión compleja en dicho proceso (Sosa, Huitrado y Ribeiro, 2014). Esto fomenta, principalmente a que estudiantes, último eslabón del proceso, sean los principales afectados al aplicar procedimientos matemáticos erróneos en el desarrollo de tareas cotidianas.

Los programas de estudio, desde el nivel primario, incorporan en todos sus contenidos matemáticos una propuesta con origen en lo intuitivo informal como proceso de adquisición de conceptos. Esta idea se sigue con la relación símbolo-objeto-cantidad en niveles pre-básicos, que posteriormente se traducirá en un enfoque estructural, permitiendo que los estudiantes conceptualicen y visualicen dichas estructuras en su forma más general y abstracta.

El presente trabajo se enmarca dentro de un proyecto de investigación en la Academia de Humanismo Cristiano (Chile) que pretende en una primera parte recabar información de investigaciones sobre los errores en tareas algebraicas que cometen estudiantes en el ciclo secundario y de profesores en formación y ejercicio como parte de una revisión bibliográfica. Se finaliza con algunas recomendaciones y proyecciones generales al respecto.

Hacia una caracterización de pensamiento algebraico

Los temas de álgebra en varios países comienzan a ser tratados desde los cursos de educación secundaria y con una incorporación un tanto abrupta. Pero desde que se han evidenciado las problemáticas que surgen en el aprendizaje del algebra sin tener nociones previas se ha ido introduciendo, progresivamente, desde cursos primarios con el nombre de Pre-Álgebra o Early Álgebra. Esta asume una separación estricta entre la enseñanza de la aritmética que se supone previa y un fragmento de la concepción del álgebra como una aritmética generalizada (Molina, 2006).

En la actualidad diversos congresos, tanto a nivel latinoamericano como internacional han dedicado espacios y grupos de discusión que giran en torno al álgebra escolar, destacándose los Topic Study Group (TSG) del ICME (International Congress Mathematics Education). Para el año 2016, ya el TSG 10 tiene por objetivo la centrar sus esfuerzos las discusiones en torno al aprendizaje y enseñanza del álgebra (Teaching and Learning of early álgebra). Este se centrará en el nivel primario sobre pensamiento algebraico natural, características del pensamiento algebraico, desarrollo curricular y materiales en algebra, prácticas docentes y cambio en diversas clases, diagnóstico y valoración del pensamiento algebraico en niños, donde se focaliza el trabajo de dificultades y de significados que se da al álgebra en etapa escolar.

Diversos autores han caracterizado el pensamiento algebraico en etapa escolar. Para Vergel (2014), este es como una forma particular de reflexionar matemáticamente […], es decir, en tanto saber, es un conjunto de procesos corporizados de acción y de reflexión constituidos histórica y culturalmente. Por su parte Kieran (1996) lo interpreta como un acercamiento a situaciones cuantitativas que hace hincapié en los aspectos relacionales generales con herramientas que no son necesariamente aspectos simbólicos, pero que en última instancia, puede ser utilizado como apoyo cognitivo para introducir y para sostener el discurso más tradicional del álgebra escolar.

Kieran señalaba (1989, p. 165), que "para una caracterización significativa del pensamiento algebraico no es suficiente ver lo general en lo particular, se debe ser capaz de expresarlo algebraicamente". Esta connotación se asume como una condición previa para iniciarse en la *manipulación* de representaciones simbólicas para producir otras equivalentes que sean más útiles para la resolución de los problemas.

Los procesos de razonamiento algebraico se comienzan a incluir desde niveles elementales de escolaridad, los que involucran el desarrollo de formas de pensamiento en actividades para las que el álgebra simbólico-literal puede ser utilizada como herramienta, pero que no son exclusivos, ya que se puede estar involucrado en el álgebra sin usar ningún símbolo literal en absoluto (Kieran, 2004), esta visión propuesta se relaciona exclusivamente con la forma en que se concibe dicha disciplina.

Siguiendo la misma línea Carpenter, Levi, Franke y Zeringue (2005) señalan que el pensamiento algebraico implica también: (i) Desarrollar un pensamiento relacional, (b) transformar expresiones matemáticas, sin restringirse al cálculo de una respuesta concreta, (c) desarrollar un conocimiento sobre conjuntos de objetos matemáticos (números o variables), de operaciones entre ellos y de propiedades de estos objetos y sus operaciones.

En síntesis, una conceptualización del desarrollo del pensamiento algebraico implica comprender la naturaleza de los objetos mismos, sus relaciones, características y generalidades de manera que la transición aritmética álgebra no sea simplemente procedimental, sino que entendiendo aquellas estructuras implícitas con las que cuenta el álgebra, particularmente la escolar. Es en este sentido cuando la escuela, cobra su rol formador en dicho proceso, particularmente la imagen del docente, quien debe propiciar espacios de interacción con este tipo de razonamiento, recibiendo retroalimentaciones que permitan producir nuevos significados (Papini, 2003).

Errores y dificultades en el álgebra escolar

Las característica del algebra en si misma entrega y aporta diversos focos para ser analizada. Algunas de estas investigaciones se centran en las dificultades de la transición aritmética-álgebra, el análisis de errores y dificultades en este proceso, la incorporación del álgebra en el currículo y el lenguaje (verbal y escrito) del álgebra (Socas, 2011).

Una de las características más comunes que se ha reportado y que ha tenido como consecuencia variados problemas y dificultades en estudiantes y profesores es la posición estática de álgebra como una simple extensión de la aritmética o aritmética generalizada. Además no se da la relevancia debida a las argumentaciones y justificaciones de los procesos operatorios que subyacen al pensamiento algebraico (Butto y Rojano, 2010).

Esta visión del álgebra y su aprendizaje trae consigo que las estrategias de enseñanza consideren estructuras limitadas de significado. Es decir, “se toma como base el dominio numérico (simbolización numérica), dejando de lado ideas importantes que se interconectan con otros dominios matemáticos, como por ejemplo el geométrico” (Butto y Rojano, 2010, p. 56).

Del mismo modo Kieran y Filloy (1989) en un trabajo clásico, reportan resultados sobre dificultades y errores que cometen estudiantes. Dicho trabajo discute principalmente un enfoque aritmético de referencia, centrándose en el trabajo sobre variables, expresiones, ecuaciones y resolución de ecuaciones. Para el caso de este marco aritmético se reporta que los estudiantes presentan dificultades al ver la operatoria algebraica como operatoria aritmética. Se identifican: (i) la forma de ver el signo igual, (b) dificultades en la notación algebraica y, (c) su falta de habilidad para expresar métodos y procedimientos para resolver problemas (p. 230).

Kieran (2006), en el PME (Psychological Mathematics education) del mismo año, entrega un reporte que da cuenta de los trabajos que se han llevado a cabo por investigadores en este grupo, con el objetivo de caracterizar aquellos cambios que se han ido suscitando sobre pensamiento algebraico y el rol del simbolismo algebraico, destacándose a partir de estos trabajos tres grandes focos:

- Transición de la Aritmética al Álgebra, variables e incógnitas, ecuaciones y resolución de ecuaciones, y planteamiento y resolución de problemas verbales de álgebra.

- Uso de herramientas tecnológicas, representaciones múltiples y proceso de generalización.

- El pensamiento algebraico en los estudiantes de la escuela elemental, la enseñanza aprendizaje del Álgebra y la modelización dinámica de situaciones físicas y en entornos algebraicos.

Investigaciones más actuales como por ejemplo Sosa, Huitrado y Ribeiro (2014) y Sosa, Huitrado, Hernández, Borjon y Ribeiro (2013) realizan trabajos que buscan discutir y reflexionar sobre la forma del pensamiento algebraico y cómo los estudiantes utilizan sus errores para construir sobre la práctica y su rol en el proceso aprendizaje. Ello, con el fin de que puedan, en su propio proceso analizar errores en tareas algebraicas y la influencia en su aprendizaje.

De la misma forma Castillo (2011) realiza una investigación en estudiantes de enseñanza media para determinar los errores en el manejo de simbología que pueden ser vistos como obstáculos en la resolución de problemas. Toma como base teórica, la teoría de situaciones didácticas (Guy Brousseau). Algunos de los resultados encontrados es la presencia de obstáculos habituales en el tratamiento algebraico, como traducción de lenguaje simbólico a coloquial, generalización o de operaciones inversas en ecuaciones.

Considerando la aproximación de Vigotsky de la zona de desarrollo próximo, Sánchez (2014) desarrolla un trabajo descriptivo en el nivel medio en la resolución de ecuaciones de primer grado. Considera en primera instancia los errores cometidos por una estudiante en una prueba estándar. Los errores cometidos por la estudiante se toman como base para trabajar metodológicamente en base a la estructuración conceptual y axiomática al resolver ecuaciones. Los modos de pensamiento algebraico de la estudiante eran limitados, dada la concepción operatoria y no estructural sobre las ecuaciones.

Noss, Poulovassilis, Geraniou, Gutierrez-Santos, Hoyles, Kahn, Magoulas y Mavrikis (2011) desarrollan un trabajo en el que se implementa un diseño a estudiantes de entre 12 a 14 años de edad en el aprendizaje de la generalización algebraica. Ellos presentan elementos necesarios para su comprensión de la generalización. Estos autores proponen que el álgebra tiene dos facetas, las que dependen de los estudiantes y cómo ellos la visualicen:

- La primera, hace mención a una metodología que potencia el pensamiento de lo desconocido. Realizando generalizaciones y probar conjeturas y

- La segunda, es la faceta que atiende al área operacional y del cálculo. Practicar y entender las reglas de transformación de expresiones algebraicas.

En esta misma línea, Radford (2010, 2006) desde una perspectiva epistemológica y semiótica desarrollando un trabajo asociado a la generalización de patrones, proponiendo que no todas las generalizaciones son algebraicas. En este estudio se considera una investigación anterior, que analiza la transición del aritmética al álgebra. Radford (2010) propone que el pensamiento algebraico es una forma particular de reflexión matemática, pero se pregunta, "what is it that makes algebraic thinking distinctive?" (p. 39).

Bagni (2000), realiza un estudio con el objetivo de analizar errores comunes en estudiantes de entre 16 a 19 años de edad, en relación a algunas aplicaciones lineales y solución de ecuaciones algebraicas. Varios autores han reportado la incorporación de problemas en aplicaciones lineales en tareas algebraicas (Engler, Gregorini, Muller, Vrancken y Hecklein, 2004; Escudero 2007; Higa, Bumalen y Tarifa, 2010; Socas, 1997; Socas y Palarea, 1997; Palarea, 1998; Castellanos y Obando, 2009).

Algunas de estas aplicaciones lineales usuales son:

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm b^2$	$(a \pm b)^3 = a^3 \pm b^3$
$\sqrt{a \pm b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$	$\sqrt[3]{a \pm b} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$
$\sin(a \pm b) = \sin(a) \pm \sin(b)$	$\cos(a \pm b) = cos(a) \pm \cos(b)$
$\log_e(a + b) = \log_e(a) + \log_e(b)$	$\dots$

Por su parte, Duval (1993, citado en Bagni) plantea que la visualización puede ser una herramienta importante a considerar. Así mismo considera que los objetos matemáticos, en general, no son de fácil acceso a la percepción de las personas, menos de los estudiantes, considerando que las representaciones semióticas de una objeto matemático son realmente necesarias.

Otro de los problemas que se asocia a la capacidad del pensamiento algebraico, son los problemas de enunciado verbal. Estos “permite conectar situaciones en el mundo real con las abstracciones propias de las matemáticas, dándoles sentido y haciendo útil este conocimiento” (Gómez-Ferragud, Solaz-Portolés y Sanjosé, 2014, p. 1240).

Dificultades que enfrentan profesores en formación

Al centrarnos en el profesor como agente para promover el aprendizaje, fomentar el conocimiento e implementar actividades para que los estudiantes incorporen este nuevo lenguaje de representación, este debe poseer un conocimiento, tanto del contenido como de su didáctica. Es el profesor el eje articulador y especializado, encargado en promover una actitud de aprendizaje y conocimiento en estudiantes.

Se presentan algunas investigaciones centradas en profesores, en las que se han reportado algunas de sus dificultades en el desarrollo de tareas algebraicas. Algunas se han llevado a cabo en programas de formación de profesores y otras en profesores en ejercicio.

En la formación de profesores Martínez y Hernández (2011) realizan una investigación de profesores en formación secundaria. Ellos consideran la clasificación que hace Matz (1982) para clasificar los errores en el desarrollo de tareas algebraicas: (a) errores generados por una elección incorrecta de una técnica de extrapolación, (b) errores que reflejan un conocimiento básico pobre, aunque correcto y, (c) errores que surgen durante la ejecución de un procedimiento. Concluyen que las dificultades radican al operar algebraicamente, principalmente por el uso de reglas. Estas las recuerdan textualmente y al extrapolarlas a diversos ejercicio similares cometen errores.

La investigación realizada por Aké (2013), toma como marco de referencia "*enfoque ontosemiotico del conocimiento y la instrucción matemática"* (Godino, Batanero y Font, 2009). Construye y aplica un cuestionario que evalúo algunas características parciales de conocimientos sobre razonamiento algebraico en una muestra de 40 profesores de educación primaria. En general, los resultados reportados dan cuenta de las dificultades de los profesores que sugieren la falta de familiarización de los procesos y desarrollo de ideas algebraicas. Algunas de estas dificultades que manifiestan los profesores en formación, son las que se enseñan con posterioridad en estudiantes, al no contar, el profesor, con un conocimiento global y entendido de la disciplina algebraica.

Tratando de profundizar en el conocimiento de profesores, se analiza una experiencia formativa en el nivel primario. Esta centró su objetivo en el desarrollo de conocimientos para discriminar objetos algebraicos de los diferentes niveles de algebrización. Se usó como marco metodológico de referencia la Ingeniería

Didáctica que deriva de la teoría de situaciones didácticas Brousseau (1997). Se encontró evidencia de las complicaciones al reconocer objetos algebraicos y asignar niveles de desarrollo algebraico. (Aké, Godino, Fernández y Gonzato, 2014).

En esta misma línea Van de Kieboom, Magiera y Moyer (2013) exploran la relación del pensamiento algebraico de futuros profesores y aquellas preguntas que plantean a estudiante secundarios para ver qué tipo de pensamiento algebraico poseen. Estos autores evaluaron la competencia de futuros profesores considerando el desarrollo de 125 tareas de tipo algebraica y las características que estas tenían. Dentro de los resultados obtenidos se constató que los profesores más novatos no elaboraron “algebraic tasks”. Por el contrario, aquellos profesores con mayor experiencia en pensamiento algebraico plantearon preguntas de sondeo para indagar sobre el nivel de pensamiento algebraico de estudiantes, lo que deja entrever la importancia en el desarrollo de secuencias de aprendizaje la consideración de los conocimientos previos de los estudiantes.

Hurtado y Torres (2013) presentan una investigación que busca indagar sobre los conocimientos didácticos de un profesor secundario para diseñar unidades en torno a las ecuaciones de primer grado y aquellos conocimientos curriculares y didácticos necesarios para analizar la unidad diseñada. El enfoque de análisis utilizado es el que lleva a cabo el grupo PNA de la Universidad de Granada, que propone una secuencia para planificar diseñar, implementar y evaluar dichas unidades (Rico y Segovia, 2001). Dentro de los resultados obtenidos se consideran dos perspectivas:

i) la histórica que da cuenta de cómo el referente geométrico aritmético permite dotar de campo semántico el sistema de símbolos,

ii) desde un enfoque fenomenológico, que reconoce la importancias fundamental de identificar los fenómenos para los cuales las ecuaciones de primer grado son:

La importancia de definir y enmarcar algunas investigaciones actuales sobre el nivel de pensamiento algebraico en futuros profesores radica principalmente que los modelos mentales algebraicos. La forma de concebir esta rama repercute directamente en el aprendizaje de los estudiantes en etapa escolar. Las estructuras de enseñanzas, los discursos predominantes, los marco de conocimiento del profesor, los diversos recursos por ejemplo semióticos utilizados en aula, son a veces factores que inciden en cómo se internaliza el álgebra y su comprensión. Esta merece ser considerada en su complejidad simbólica e interpretativa.

Proyecciones

La importancia que se desprende de los resultados de las investigaciones presentadas radica en el abanico de marcos y metodologías con las que se ha estado trabajando para detectar las causas de errores y dificultades en estudiantes y profesores en formación y ejercicio. Esto nos permite tener un estado actual de los conocimientos que se están poniendo en juego y las actividades que potencias mayormente una comprensión del álgebra. En nuestro caso particular esta revisión nos entrega las directrices para centrar la atención en cómo el profesor conoce de estas dificultades y las utiliza como medios de aprendizaje en el nivel secundario. Esto forma parte de una segunda etapa del proyecto de investigación centrandono en el profesor como objeto de estudio. Particularmente en su conocimiento especializado adoptando como marco referencial del MTSK (Mathematics Teacher´s Specialized Knowledge). Y posteriormente situarnos en el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM) que indaga sobre las características del proceso de la comprensión de distintos contenidos (algebraicos), de su lenguaje, así como de los errores, dificultades y obstáculos en el desarrollo de tareas algebraicas.

Referencias Bibliográficas

Aké, L. (2013). *Evaluación y desarrollo del razonamiento algebraico elemental en maestros en formación.* Tesis doctoral publicada. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Aké, L., Godino, J., Fernández, T., y Gonzato, M. (2014). Ingeniería didáctica para desarrollar el sentido algebraico de maestros en formación. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *1*(5).

Bagni, G. (2000). Simple Rules and General Rules in Some High School Students' Mistakes. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *21*(2), 124-138.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics. Didactique des Mathématiques: 1970-1990.* Dordrecht, Netherands: Kluwer Academic Publishers.

Butto, C. y Rojano, T. (2010). Pensamiento algebraico temprano: El papel del entorno Logo.

Educación Matemática, 22 (3), 55-86.

Carpenter, T., Levi, L., Franke, M., y Zeringue, J. (2005). Algebra in elementary school: Developing relational thinking. *ZDM*, 37(1), 53-59.

Castellanos, M. y Obando, J. (2009). *Errores y dificultades en procesos de representación: el caos de la generalización y el razonamiento algebraico.* Conferencia presentada en 10º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa, Pasto, Colombia.

Castillo, Y. (2011). *Representaciones simbólicas: un obstáculo para la solución de problemas algebraicos*. Tesis de Magíster no publicada. Facultad de Humanidades y educación. Universidad de Zulia. Venezuela.

Duval, R. (1993). Registres de representation semiotique et fonctionnement cognitif de la pensee, *Annales de Didactique el de Sciences Cogllilives,* 5, lREM, Strasbourg.

Engler, A., Gregorini, M. I., Müller, D., Vrancken, S., y Hecklein, M. (2004). Los errores en el aprendizaje de matemática. *Revista Premisa*, (23), 23-29.

Escudero, R. (2007). Uso de los errores matemáticos como dispositivo didáctico para generar aprendizaje de la racionalización de radicales de tercer orden. *Zona Próxima*, (8).

Franchi, L., Bohórquez, H., Hernández, A., y Medina, N. (2012). Actitud del estudiante de ingeniería hacia sus errores en el aprendizaje de la matemática. *Telos*, *13*(3), 371-396.

Gómez-Ferragud, B., Solaz-Portolés, J., y Sanjosé, V. (2014). Dificultades para Codificar, Relacionar y Categorizar Problemas Verbales Algebraicos: dos estudios con estudiantes de secundaria y profesores en formación. *Boletim de Educação Matemática*, *28*(50), 1239-1261.

Higa, M., Bumalen, L., y Tarifa, G. (2009). Los errores: ¿se emplean en la construcción del conocimiento matemático en el nivel medio? En I. Zapico & S. Tajeyan (Eds.) *Acta de la VII Conferencia Argentina de Educación Matemática.* (pp. 9-17).

Hurtado, C. y Torres, L. (2015). Análisis didáctico de las ecuaciones de primer grado con una incógnita real. *XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática (CIAEM).* Recife, Brasil: Recuperado 10 de Julio de 2015. Recuperado de http://xiv.ciaem-iacme.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/view/538/245

Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: A structural perspective. In S. Wanger and C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of* *algebra.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, Lawrence Erlbaum.

Kieran, C. y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias*, 7 (3), pp. 229-240.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it. *The Mathematics Educator, 18*(1), 139-151.

Kieran, C. (2006). Research the Learning and Teaching of Algebra. En Gutiérrez, A. y Boero, P. (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*. Sense Publishers. Rotterdam, pp. 11-49.

Martínez, A., y Hernández, M. (2011). Errores algebraicos que cometen los profesores en formación. *XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática (CIAEM).* Recife, Brasil: Recuperado 25 de Junio de 2015. Disponible en http://www.lematec.no-ip.org/CDS/XIIICIAEM/artigos/2245.pdf

Matz, M. (1982). Towards computational theory of algebraic competence. *Journal of Mathematical Behavior.*3 (1), 93-166.

Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria*. Tesis doctoral publicada. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, España.

Noss, R., Poulovassilis, A., Geraniou, E., Gutierrez-Santos, S., Hoyles, C., Kahn, K., Magoulas, G. D., y Mavrikis, M. (2011). The design of a system to support exploratory learning of algebraic generalization. *En: Computers & Education*. Vol. 59, Issue 1, pp. 63-81.

Palarea, M. (1998). *La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años.* Tesis doctoral no publicada, Departamento de Análisis Matemático, Universidad de la Laguna, Tenerife.

Papini, M. (2003). Algunas explicaciones vigotskianas para los primeros aprendizajes del álgebra. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *6*(1), 41-72.

Radford, L. (2006b). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, número especial sobre semiótica, cultura y pensamiento matemático (editores invitados: L. Radford & B. D'Amore), pp. 267-299.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, 4(2), 37-62.

Rico, L., y Segovia, I. (2001). Unidades didácticas. Organizadores. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 83-104). Madrid: Síntesis.

Sánchez, N. (2014). Análisis de errores asociados a la resolución de ecuaciones de primer grado. Una aproximación desde la zona de desarrollo próxima. En *Acta: Jornadas Nacionales de Educación Matemática. Vol. XVIII.* (pp. 196 - 203).

Socas, M. y Palarea, M. (1994). Algunos obstáculos cognitivos en el aprendizaje del lenguaje algebraico. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, (16), 91-98.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En L. Rico (Coord.), E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, M. Sierra y M.M. Socas (Eds.), *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Barcelona: ICE- Horsori.

Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria: Aportaciones de la investigación. *Números*, (77), 5-34.

Sosa, L., Huitrado, J., y Ribeiro, C. (2014). Os erros “comuns” dos alunos como eixo detonador para uma reflexão sobre a prática do professor de matemática. Martinho, M. H., Tomás Ferreira, R. A., Boavida, A. M., & Menezes, L. (Eds.) (2014).*Atas do XXV Seminário de Investigacao em Educacao Matemática.* Braga: APM., pp. 217–227. Disponible en: http://www.apm.pt/encontro/profmat_2014_siem.php?id=211764

Sosa, L., Huitrado, L., Hernández, J., Borjón, E., y Ribeiro, M. (2013). Uma oportunidade para o profesor aprender analizando os erros dos alunos–Un exemplo de Álgebra. *atas XIX Encontro Nacional de Professores de Matemática (ProfMat 2013), Lisboa: APM*. Disponible en: http://www.apm.pt/files/_sosa_et_al_uma_oportunidade_texto_completo_51f13d2d272b0.pdf

Van den Kieboom, L., Magiera, M., y Moyer, J. (2014). Exploring the relationship between K-8 prospective teachers’ algebraic thinking proficiency and the questions they pose during diagnostic algebraic thinking interviews. *Journal of Mathematics Teacher Education 17*(5), 429-461.

Vergel, R. (2014). *Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años).* Tesis Doctoral no publicada, Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

La Heurística De Los Modelos Emergentes En Álgebra Lineal: Un Estudio Exploratorio Con Estudiantes De Primer Año De Ingeniería

A. Cárcamo, J. Gómez, J. M. Fortuny
Universidad Austral de Chile, Universidad Politécnica de Cataluña, Universidad Autónoma de Barcelona

Resumen

Este estudio exploratorio informa sobre un primer ciclo de experimentación que utiliza un diseño instruccional innovador basado en la heurística de los modelos emergentes. El objetivo de este estudio es determinar qué aporta este tipo de diseño a la construcción de conceptos de álgebra lineal, específicamente para conjunto generador y espacio generado. La metodología que se usa es la investigación de diseño y los participantes son estudiantes que cursan primer año de ingeniería. Los resultados sugieren que este tipo de diseño abre posibilidades a los estudiantes de construir los conceptos de conjunto generador y espacio generado, por lo tanto, podría ser adecuado para ser utilizado en el aprendizaje de otros conceptos claves de álgebra lineal.

Palabras clave: modelos emergentes, conjunto generador, espacio generado, álgebra lineal, investigación de diseño.

Planteamiento del problema

Álgebra lineal se encuentra entre las primeras asignaturas que tiene un estudiante vinculado al área de Matemática y es considerada fundamental porque cumple un rol esencial para el desarrollo posterior de otras asignaturas debido a su naturaleza unificadora y generalizadora (Dorier, 2002), pero además, porque es una herramienta poderosa para resolver problemas de distintas áreas (Carlson, Johnson, Lay y Porter, 1993). Sin embargo, a pesar de su relevancia, la enseñanza del Álgebra lineal a nivel universitario es casi universalmente considerada como una experiencia frustrante tanto para profesores como estudiantes (Hillel, 2000).

Con la finalidad de buscar alternativas para la enseñanza y el aprendizaje de álgebra lineal, se han diseñado y realizado experiencias en este curso realizando variaciones a las clases magistrales, ya sea: incorporando el uso de tecnología (Day y Kalman, 1999), la modelización matemática (Possani, Trigueros, Preciado y Lozano, 2010) o diseñando tareas basadas en la heurística de los modelos emergentes (Wawro, Rasmussen, Zandieh y Larson, 2013).

Por otra parte, Rasmussen et al. (2010) señalan que los estudios recientes sobre la enseñanza y el aprendizaje de álgebra lineal profundizan en las formas productivas y creativas que los estudiantes son capaces de desarrollar al interactuar con las ideas de álgebra lineal, caracterizando la progresión del estudiante desde sus actuales formas de razonamiento a maneras más formales. Estas investigaciones presentan como base teórica la heurística de los modelos emergentes de la educación matemática realista o complementan dos teorías (APOE y perspectiva de modelos y modelado) como se observa en el estudio de Possani et al. (2010).

A partir de lo expuesto, surge la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué aporta un diseño instruccional basado en la heurística de los modelos emergentes a la construcción de conjunto generador y espacio generado? Para responder a esta pregunta se plantea como objetivo diseñar, implementar y evaluar un diseño instruccional basado en la heurística de los modelos emergentes para la construcción de conjunto generador y espacio generado.

Marco teórico

El marco teórico de este estudio se centra en la heurística de los modelos emergentes que sustenta el diseño instruccional utilizado en este experimento de enseñanza.

La heurística para el diseño instruccional de los modelos emergentes es una alternativa a los métodos de enseñanza que se centran en la enseñanza de las representaciones ya hechas y tiene como objetivo el diseño de actividades de instrucción que apoyen a los estudiantes al desarrollo de herramientas matemáticas que pueden necesitar en algún momento (Gravemeijer, 2002).

Para el progreso desde la actividad matemática informal a un razonamiento matemático formal Gravemeijer (1999) establece cuatro niveles de actividad: situacional (el conocimiento del problema y las estrategias son utilizados en el contexto de la situación misma), referencial (implica modelos, descripciones, conceptos y procedimientos que se refieren al problema de la actividad situacional), general (se desarrolla a través de la exploración, reflexión y generalización de lo aparecido en el nivel anterior, pero con un foco matemático sobre las estrategias sin hacer referencia al problema) y formal (se trabaja con los procedimientos y notaciones convencionales). De acuerdo a Gravemeijer (2007) los estudiantes comienzan modelando su propia actividad matemática informal y en el transcurso, el carácter del modelo va cambiando gradualmente para el estudiante, convirtiéndose en un modelo más formal de su razonamiento matemático, pero enraizado en el conocimiento experiencial del estudiante.

El nivel de actividad situacional supone un contexto experiencialmente real para los estudiantes, aunque no necesariamente de la vida cotidiana (Gravemeijer, 1999). En este estudio se considera un contexto de la vida cotidiana y la modelización matemática como una herramienta de ayuda al estudio de las matemáticas porque es una metodología eficaz en álgebra lineal y una correa de transmisión que proporciona la adquisición de conocimientos a la vez que establece la hermandad entre matemática y realidad (Gómez y Fortuny, 2002).

Metodología

Diseño

Este estudio empírico tiene como objetivo diseñar, implementar y evaluar un diseño instruccional basado en la heurística de los modelos emergentes para la construcción de conjunto generador y espacio generado. Para ello, se efectuó una investigación de diseño (Cobb y Gravemeijer, 2008). En la primera fase se elaboró una trayectoria hipotética de aprendizaje (Simon, 1995) y un diseño instruccional basado en la heurística de los modelos emergentes de Gravemeijer (1999). En la Tabla 1 se presenta una síntesis de cómo se manifiestan estos en las tareas del diseño instruccional. Luego, se realizó un primer ciclo de experimentación en una universidad española con estudiantes que cursaban el primer año de ingeniería.

Experimento de enseñanza y recolección de datos

La experimentación se realizó con 30 estudiantes de primer año de ingeniería en el periodo 2013-2014. Esta primera ronda del experimento se desarrolló en 5 horas distribuidas en 3 sesiones de clases, en las que se trabajó en pequeños grupos (3 a 5 estudiantes).

Los datos que se recogieron en este experimento incluyeron: protocolos escritos de las actividades de aprendizaje desarrolladas por los estudiantes en grupo, vídeo y grabaciones en audio y entrevista individuales al finalizar la experimentación.

Análisis

El análisis de datos se inició con la organización, anotación y descripción de los datos. Inicialmente, las tareas desarrolladas por los estudiantes y las grabaciones fueron analizadas por el equipo de investigación desde la perspectiva de la pregunta de investigación. Posteriormente, los datos recopilados se analizaron identificando ejemplos en que se manifestaba algún cambio del razonamiento informal a uno más formal con respecto a los conceptos estudiados. A partir de este análisis, se creó una historia que reconstruye el proceso de aprendizaje que siguieron los estudiantes.

Tabla 1. Descripción de las tareas del diseño instruccional y su relación con los niveles de actividad de Gravemeijer

Descripción de tarea	Qué niveles de actividad se manifiestan en la tarea
Tarea 1: Generando contraseñas con vectores. Se les entrega información de la importancia de las contraseñas seguras, las características que deben tener y ejemplos de cómo crear contraseñas con Excel. A partir de esto, inventan un generador de contraseñas seguras utilizando vectores.	Nivel situacional. Los estudiantes utilizan sus estrategias en conjunto con sus conocimientos de matemática y de contraseñas para elaborar un generador de contraseñas seguras.
Tarea 2: Relacionando el generador de contraseñas con conjunto generador y espacio generado. De acuerdo con la solución de su generador de contraseñas se les pide dos conjuntos: uno que posea todas las contraseñas numéricas de su generador de contraseñas y otro que tenga vectores numéricos que al hacer la combinación lineal de ellos se obtenga el vector genérico que genera sus contraseñas numéricas. Luego que el profesor introduce los conceptos, realizan una analogía entre estos y su generador de contraseñas.	Nivel referencial. Los estudiantes haciendo referencia a la solución propuesta de su generador de contraseñas presentan dos conjuntos con determinadas características y luego, que el profesor define formalmente los conceptos, enlazan esta nueva realidad matemática con el problema real, al hacer una analogía entre ellos.
Tarea 3: Aplicando lo aprendido. Utilizan los conceptos de conjunto generador y espacio generado para explorar y profundizar en relación a ellos usando la notación convencional matemática.	Nivel general y formal. Los estudiantes utilizan lo trabajado en la tarea anterior para explorar sobre conjunto generador y espacio generado usando sus conocimientos y notaciones matemáticas.

Resultados

Los resultados del estudio se presentan a través de la historia del proceso de aprendizaje que siguieron los estudiantes (*storyline of students' learning process* planteado por Doorman, Drijvers, Gravemeijer, Boon y Reed, 2013) en relación al diseño instruccional.

Tarea 1: Generando contraseñas seguras

Esta tarea tuvo como objetivo que los estudiantes activaran sus concepciones previas de vectores. El contexto elegido para la tarea 1 fue la generación de contraseñas. La información que se les entregó consistió en una noticia sobre redes sociales *hackeadas* y de cómo generar claves usando *Excel*. Con estos antecedentes, se les propuso crear un generador de contraseñas que utilizara vectores. Los grupos plantearon distintas soluciones, aunque similares a la que se ve en la Figura 1, ya que propusieron un modelo matemático de un vector genérico con un determinado número de componentes para generar contraseñas y para mostrar su efectividad, dieron un número específico a su(s) variable(s) e inmediatamente, aplicaron su proceso de codificación para interpretar lo realizado matemáticamente al contexto del problema, obteniendo una contraseña creada a partir de su generador de contraseñas.

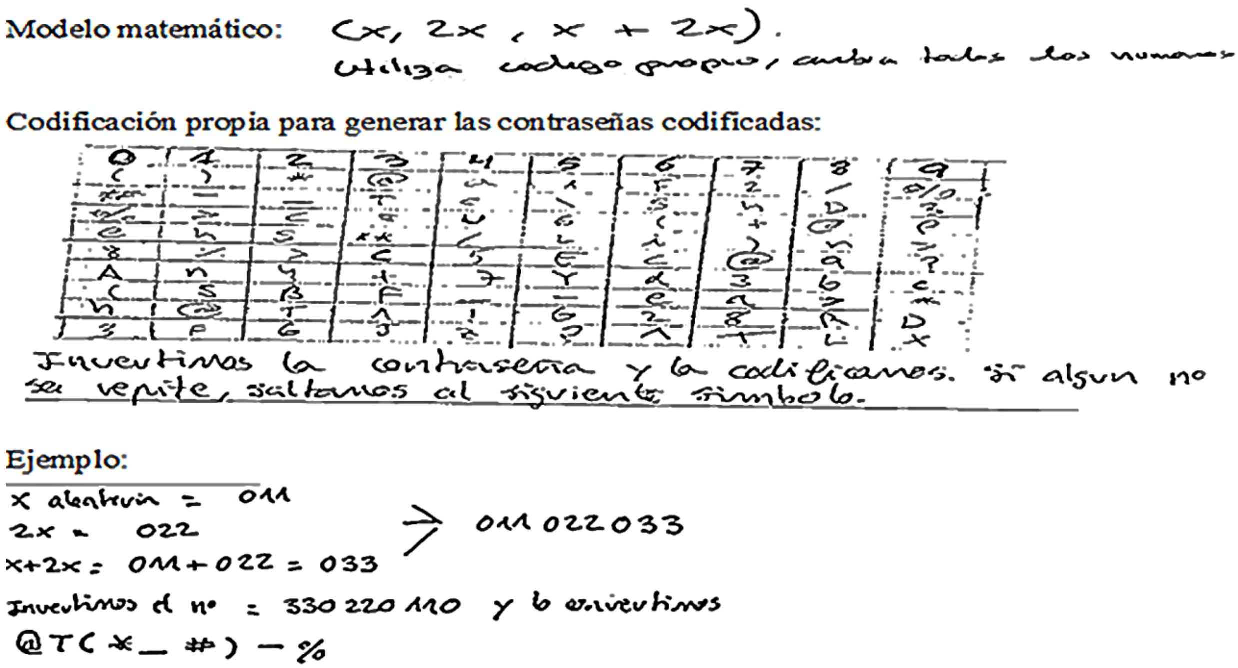


Figura 1. Solución propuesta por un grupo al problema de crear un generador de contraseñas

Tarea 2: Relacionando el generador de contraseñas con conjunto generador y espacio generado

La tarea 2 incluyó dos apartados. En el primer apartado, los grupos de estudiantes anotaron dos conjuntos: uno G que contenía todas las contraseñas numéricas de su generador de contraseñas y otro A que tenía vectores numéricos que al hacer la combinación lineal de ellos se obtenía el vector genérico que creaba sus contraseñas numéricas. Luego de escribir los conjuntos A y G se les preguntó cuál era la relación entre estos. La respuesta que predominó fue que "*A genera a través de la combinación lineal de sus vectores a los elementos de G*", es decir, los estudiantes lograron establecer una conexión entre los conjuntos, aunque algunos de ellos presentaron dificultades con la notación matemática.

Después de que el profesor definió formalmente conjunto generador y espacio generado, los grupos de estudiantes realizan el siguiente apartado que consistió en hacer una analogía entre estos conceptos y su generador de contraseñas. En general, hacen la analogía de acuerdo con su generador de contraseñas, sin embargo, se observa que algunos grupos le designan otro nombre al conjunto generador indicándolo como: vector(es) generador(es) o conjunto de vectores.

Tarea 3: Aplicando lo aprendido

En esta tarea utilizaron conjunto generador y espacio generado para explorar y profundizar acerca de ellos en problemas con notación convencional matemática. Las respuestas a esta tarea dio evidencias que gran parte de los grupos identificó como diferencia entre los conceptos que los vectores del conjunto generador crean al espacio generado y además, identificaron en notación matemática que uno de ellos tiene una cantidad finita de vectores mientras que el otro no. Además, lograron verificar si un vector pertenece a un cierto espacio generado haciendo combinación lineal de los vectores del conjunto generador de éste. Sin embargo, sólo algunos grupos lograron representar gráfica y analíticamente el espacio generado por un determinado conjunto generador.

Las dificultades que se observaron se relacionaron con: la falta de rigurosidad en el uso del lenguaje matemático, el uso de los términos en notación matemática de forma intercambiada y las diferentes formas de representar los conceptos en estudio. Un ejemplo de ésta última, se observa en la Figura 2 cuando se le pregunta si el vector (2,-3) pertenece al espacio generado por B={(1,0),(0,-1)}, pues para ellos pareciera que es equivalente a indicar "*conjunto B={(1,0),(0,-1)}".*

Falso, porqué el espacio generado por B sólo pueden ser los vectores (1,0) y (0,-1).

Figura 2. Ejemplo de respuesta para una pregunta de la tarea 3

Los resultados de la aplicación del diseño instruccional mostraron que los estudiantes resolvieron el problema de crear un generador de contraseñas (activando sus conocimientos previos de vectores) y a partir de éste, trabajaron en la siguiente tarea, describiendo conjuntos que contenían una cantidad finita e infinita de vectores relacionados con el contexto inicial, los cuales vincularon con conjunto generador y espacio generado. Esto último les permitió visualizar los conceptos tanto en un contexto real como matemático. Por consiguiente, identificaron algunas características de conjunto generador y espacio generado como la relación de inclusión entre ellos, a pesar de que algunos grupos evidenciaron dificultades con las diferentes formas de representarlos, especialmente geométricamente.

Lo expuesto da indicios que la mayoría de los grupos de estudiantes realiza una transición del modelo de actividad situacional hacia el modelo para el razonamiento más formal de los conceptos de conjunto generador y espacio generado.

Conclusiones

El principal aporte de este estudio exploratorio es entregar una propuesta de innovación sobre el uso de la heurística de los modelos emergentes para la construcción de conjunto generador y espacio generado. La originalidad de este diseño está dado por las escasas investigaciones en la literatura actual en relación a estos conceptos de álgebra lineal.

A partir del análisis de datos, se dio respuesta a la pregunta de este estudio, pues se observó que las siguientes características del diseño instruccional basado en la heurística de los modelos emergentes aportaron a la comprensión de los conceptos de conjunto generador y espacio generado:

- Los estudiantes a través de la creación de un generador de contraseñas activaron sus concepciones previas de vectores lo que les ayudó a conectar éstas con la siguiente tarea que procuraba una primera aproximación de conjunto generador y espacio generado.

- La tabla de analogía entre el contexto de generar contraseñas numéricas y los conceptos en estudio ayudó a los estudiantes a visualizar estos tanto en un contexto real como matemático, al mismo tiempo que les ofreció la posibilidad de diferenciarlos al utilizarlos en una situación real.

- La tarea 3 fortaleció las nociones de ambos conceptos al tener que profundizar sobre ellos en problemas de contexto matemático, evidenciándose en los resultados que gran parte, logra identificar la relación de inclusión que existe entre estos y también que reconocen las condiciones que debe cumplir un vector para pertenecer a un espacio generado.

Los resultados de este estudio dan indicios que este tipo de diseño instruccional basado en la heurística de los modelos emergentes favorece la construcción de los conceptos de conjunto generador y espacio generado, lo que se evidencia en que los estudiantes lograron progresar desde la tarea del *nivel situacional* que solo demandaba utilizar sus concepciones previas hacia una tarea del *nivel formal* que exigía aplicaciones de los conceptos matemáticos involucrados.

Para el siguiente ciclo de aplicación de este diseño instruccional se sugieren las siguientes modificaciones: incorporar evaluación formativa en el desarrollo del diseño instruccional con el propósito de ayudar a los estudiantes en las dificultades que puedan surgirles y replantear la tarea 3 con la finalidad de que existan preguntas tanto de propiedades como de aplicaciones de conjunto generador y espacio generado.

Referencias

Carlson, D., Johnson, C. R., Lay, D. C., y Porter, A. D. (1993). The linear algebra curriculum Study group recommendations for the first course in linear algebra. *The College Mathematics Journal*, *24*(1), 41-46.

Cobb, P., y Gravemeijer, K. P. E. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. En Anthony E. Kelly, R. A. Lesh y J. Y. Baek (Eds.), Handbook of design rsearch methods in education innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching (pp. 68-95). New York, NY: Routledge.

Day, J. y Kalman, D. (1999). Teaching Linear Algebra: What are the Questions? *Department of Mathematics at American University in Washington D.C.,* 1-16.

Dorier, J-L. (2002). Teaching Linear Algebra at University. En Li Tatsien (ed*.), Proceedings of the International Congress of Mathematician* (pp. 875-884). Beijing: Higher Education Press.

Doorman, M., Drijvers, P., Gravemeijer, K., Boon, P., y Reed, H. (2013). Design research in mathematics education: The case of an ict-rich learning arrangement for the concept of function. En T. Plomp y N. Nieveen (Eds.), *Educational design research – Part B: Illustrative cases* (pp. 425-446). Enschede, the Netherlands: SLO.

Gómez i Urgellés, J. V. y Fortuny, J. M. (2002). Contribución al estudio de los procesos de modelización en la enseñanza de las matemáticas en escuelas universitarias. *Uno: Revista de didáctica de las matematicas*, (31), 7-23.

Gravemeijer, K. (1999). How Emergent Models May Foster the Constitution of Formal Mathematics, *Mathematical Thinking and Learning*, *1*(2), 155-177. doi: 10.1207/s15327833mtl0102_4

Gravemeijer, K. (2002). Emergent modeling as the basis for an instructional sequence on data analysis. En B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the 6th International Congress on Teaching Statistics*. Voorburg, The Netherlands:

International Statistical Institute. Recuperado de http://iase-web.org/documents/papers/ icots6/2d5_grav.pdf

Gravemeijer, K. (2007). Emergent modelling as a precursor to mathematical modelling. En W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn, y M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education* (pp. 137–144). New York: Springer.

Hillel, J. (2000). Modes of Description and the Problem of Representation in Linear Algebra. En J.-L. Dorier (Ed.). *On the teaching of linear algebra* (191–208). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Possani, E., Trigueros, M., Preciado, J.G., & Lozano, M.D. (2010). Use of models in the teaching of linear algebra. *Linear Algebra and its Applications*, 432(8), 2125-2140.

Rasmussen, C., Trigueros, M., Zandieh, M., Possani Espinosa, E., Wawro, M, and Sweeney, G. (2010). Building on students' current ways of reasoning to develop more formal or conventional ways of reasoning: The case of linear algebra. En Brosnan, P., Erchick, D. B., and Flevares, L. (Eds.), *Proceedings of the 32nd annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 1577- 1587). Columbus, OH: The Ohio State University.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26* (2), 114–145.

Wawro, M., Rasmussen, C., Zandieh, M., y Larson, C. (2013). Design research within undergraduate mathematics education: An example from introductory linear algebra*. Educational design research—Part B: Illustrative cases*, 905-925.

Una Aproximación Socioepistemológica Para Las Sucesiones Numéricas En El Periodo Antiguo

Nancy Janeth Calvillo Guevara, Cecilia Rita Crespo Crespo
Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada – IPN,
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González"

Resumen

En este escrito se presenta el análisis del primer momento de uso de las sucesiones numéricas, esto es, durante el periodo antiguo (prehistoria, babilonios, egipcios y griegos). Como sustento teórico se retoma el enfoque socioepistemológico, pues debido a su naturaleza sistémica, permitirá caracterizar una construcción social de la convergencia de sucesiones numéricas. Para el desarrollo de la investigación se utiliza el esquema metodológico presentado por Buendía y Montiel (2011). Hasta el momento se ha encontrado que algunas de las principales actividades en las que se usó lo sucesivo o lo convergente son: medir el tiempo, repartir alimentos, aproximar el valor de números irracionales (raíces, π), elaborar sistemas de numeración y "calcular la suma de series" con la particularidad de que éstas eran finitas o incluían procesos finitos.

Palabras clave: Convergencia de sucesiones numéricas, socioepistemología.

Introducción

Este proyecto de investigación nace a partir de haber experimentado una enseñanza tradicional como estudiante de la Licenciatura en Matemáticas. Puede decirse que el esquema de enseñanza seguía un patrón lineal en el que se pedía a los alumnos que aprendieran la teoría sin que anteriormente se realizara un tratamiento intuitivo que permitiera dar sentido a las definiciones, teoremas y demostraciones rigurosas. Este tipo de enseñanza privilegió la construcción lógico – deductiva de los conceptos involucrados, pero dejó de lado la construcción social que tuvieron las entidades matemáticas.

En el área del análisis matemático, en el discurso matemático escolar actual destaca el límite como una de las ideas fundamentales no sólo para comprender el cálculo sino también para desarrollar pensamiento al perseguir el rigor matemático (Roh, 2008).

Más precisamente se ha identificado que la convergencia de sucesiones numéricas, la cual involucra en su definición la noción de límite, es un tema enseñado en escuelas de nivel básico, medio superior y superior con un énfasis en el aspecto formal; por lo cual se considera que puede ser objeto de investigación, para analizar los aspectos que permitan en efecto lograr el aprendizaje en el cálculo e incluso principios del análisis matemático.

Por lo que en lo que sigue se hará una breve presentación de los principales problemas relacionados con la convergencia de sucesiones numéricas.

En cuanto a los problemas relacionados con la enseñanza – aprendizaje de la convergencia de sucesiones numéricas se ha reportado de manera principal dos dificultades asociadas con la comprensión de la convergencia de sucesiones numéricas: la noción de infinito que tiene involucrada y los aspectos metacognitivos de la definición.

Por ejemplo, en el estudio de Sierpinska (1987) se reporta que cuatro nociones parecen ser la principal fuente de obstáculos epistemológicos relacionados con límites: conocimiento científico, infinito, función y número real. En esta misma dirección, concerniente a los problemas asociados al aprendizaje de la convergencia de sucesiones numéricas, Przenioslo (2005) presenta un conjunto de ideas erróneas acerca del límite de una sucesión que a través de la investigación han sido determinadas:

- Los términos de una sucesión convergente se aproximan al límite, algunas veces lo alcanzan.

- Los términos se aproximan al límite, pero no deben alcanzarlo.

- Los términos deben ya sea crecer o decrecer.

- Es suficiente que infinitamente muchos términos se aproximen al límite.

- Una frontera de la sucesión es su límite.

- El límite de una sucesión es su último término.

- Una sucesión convergente debe seguir algún modelo.

- Las confusiones entre lo infinitamente inalcanzable del número de términos y la posibilidad alcanzable del valor finito del límite.

Como podemos notar, la mayoría de los puntos identificados en el trabajo de Przenioslo (2005) están relacionados con el infinito, por ejemplo en el segundo de ellos un estudiante podría tener una concepción de infinito potencial, en la cual la sucesión que sí tenga límite estará siempre moviéndose hacia al límite, pero nunca lo alcanzará.

Por otro lado, en el trabajo de (Mamona-Downs y Downs, 2000) se añaden otro tipo de problemas con los que se encuentran los estudiantes al momento de estudiar los límites:

- El estilo minimalista de la expresión, que ofrece amplitud cognitiva, pero al mismo tiempo, requiere una reflexión madura sobre la estructura.

- El contenido de la definición, que en su diseño tiene aspectos metacognitivos (énfasis en lo lógico, brevedad, facilidad de aplicación, etc.) así como cognitivos.

Lo anterior muestra que además de las dificultades asociadas al infinito manifestadas por algunos estudiantes al momento de trabajar con la convergencia de sucesiones numéricas, también podrían aparecer aquellas dificultades asociadas a la noción de límite; por ejemplo, el significado coloquial asociado a la palabra límite, que dista en buena medida de la noción matemática del concepto, ya que este último sufrió transposiciones que lo llevaron a tener una definición precisa, que permitiera una mejor comunicación, sobre todo en las instituciones donde se usó dicha noción, por ejemplo, la de los matemáticos.

Entonces, además de los aspectos relacionados con el infinito, se requiere una comprensión fuerte que permita asociar la economía (brevedad) de la definición con su aspecto lógico y sus formas de aplicación. Este hecho fue identificado por Przenioslo (2005) al investigar con estudiantes de secundaria y universidad las *imágenes del concepto* [1] de límite de una función (incluyendo a las sucesiones como un tipo de funciones), al especificar que existen problemas con la definición del concepto de convergencia de sucesiones numéricas, puesto que para la mayoría de los participantes en su estudio, la definición del concepto no fue el elemento más significativo de la imagen, ya que no se consideró útil al resolver problemas.

Aunado a lo anterior, los estudiantes tienen que lidiar con la notación que se usa en su definición. Es así que el problema que nos atañe; el del aprendizaje de la convergencia de sucesiones numéricas, se ve agravado cuando se presenta la definición rigurosa de convergencia de una sucesión, llamada la definición $\varepsilon - \mathrm{N}$ (Roh, 2008):

> *Una sucesión $\{a_n\}$ es convergente a un número real A si para algún número positivo ε, existe un número natural N tal que $|a_n - A| < \varepsilon$ para todo $n \geq N$.*
>
> (Apostol, 1974, p. 70)

Entonces, notamos que en los trabajos de investigación (Robert, 1982; Calvillo, 2007) la sugerencia es abordar la convergencia a través de ejemplos bien elegidos; es decir, aquellos que promoverán la reflexión acerca de la convergencia $\left(\frac{1}{n}, (-1)^n, \left(\frac{-1}{n}\right)^n, \text{entre otros}\right)$, y un entorno de aprendizaje que promueva su apropiación. Sin embargo, en Alcock y Simpson (2005) se observó un rango de éxito y falla entre estudiantes que visualizan y aquellos que no visualizan, de ahí que sugieren que desde un punto de vista pedagógico no hay “presentación perfecta” que sea accesible a todos los estudiantes y a cada uno lo lleve al éxito.

Entonces, es importante detectar otros elementos que pudieran ayudar en este sentido, pues como se afirma en (Camacho, 2006) es necesaria la búsqueda en la historia de las prácticas sociales, a fin de reconocer en ellas bases de significados, cuya estructura lleve a establecer la "construcción de conocimiento matemático", con lo cual nos será posible construir diseños instruccionales. De esta manera es que a continuación se presenta el planteamiento del problema.

Problema de investigación:

La convergencia de sucesiones numéricas es un tema enseñado en escuelas de nivel básico, medio superior y superior, en este último, con énfasis en el aspecto formal, en el que se han dejado de lado aquellos aspectos que ayudarían a dar sentido al estudio de este tema. Así, existe la necesidad de identificar elementos que puedan ayudar para reconocer bases de significados cuya estructura lleve a establecer la construcción social de la convergencia de sucesiones numéricas.

A partir de lo anterior se plantea la siguiente pregunta de investigación: ¿Cuál podría ser una epistemología de prácticas inmersa en la construcción de la convergencia de sucesiones numéricas?

Objetivo general:

Caracterizar la construcción social de la convergencia de sucesiones numéricas.

Objetivos específicos:

- Identificar los escenarios en los que se puede encontrar evidencias de la construcción social de la convergencia de sucesiones numéricas.

- Describir las actividades en las que se *usó* la convergencia de sucesiones numéricas (lo sucesivo, lo convergente).
- Describir las prácticas de referencia que producían el uso y el estudio de la convergencia de sucesiones numéricas (lo sucesivo, lo convergente).

Cabe señalar que en este escrito nos enfocaremos en el primer objetivo específico.

Marco teórico

La revisión de literatura muestra que los resultados de las investigaciones relativas a la convergencia de sucesiones numéricas están centradas en explicar cómo aprenden los estudiantes, pero no toman en cuenta otros aspectos, como los efectos de una enseñanza tradicional o la naturaleza epistémica de la convergencia. De esta manera notamos la importancia de incluir para nuestro trabajo un marco teórico de naturaleza sistémica como lo es la Socioepistemología.

Algunas investigaciones en Matemática Educativa reconocen problemáticas asociadas con la enseñanza aprendizaje de la matemática, en las cuales el estudio del conocimiento está basado solamente en conceptos, propios del sistema escolar, pero olvidan la construcción que se lleva a cabo en estos conceptos, solamente proporcionando un contexto adecuado y atractivo para su aprendizaje. Al respecto, la socioepistemología plantea una visión alternativa, *"*ya que permite replantear la epistemología de la construcción del conocimiento, para permitir explicar la construcción social del conocimiento matemático a la luz de las prácticas sociales y las fuentes de institucionalización vía su enseñanza*"* (Cantoral y Farfán, 2004, p. 139).

El enfoque socioepistemológico (SE) permite analizar un fenómeno educativo desde una perspectiva sistémica, que incorpora cuatro componentes fundamentales en la construcción del conocimiento: su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, los planos de lo cognitivo y los modos de transmisión vía la enseñanza, con el fin de encontrar las prácticas inmersas en la construcción de la teoría, en nuestro caso, la convergencia de sucesiones numéricas. Esto es posible ya que esta aproximación se plantea como tarea fundamental el examen del conocimiento situado, aquel que atiende a las circunstancias y escenarios socioculturales particulares, caracterizando al conocimiento como el fruto entre epistemología y factores sociales (Cantoral, 2002).

Así el estudio de la evolución de la convergencia de sucesiones numéricas, nos permitirá encontrar algunas circunstancias, algunos escenarios, ciertos medios, que posibilitaron la emergencia de este concepto y con base en ello plantearemos su construcción social (Montiel, 2005).

En la socioepistemología, el análisis del conocimiento es de corte epistemológico, por lo que, en algunos estudios se realiza una búsqueda en la historia de las prácticas sociales, a fin de reconocer en ellas bases de significados o resignificaciones cuya estructura lleve a establecer "construcción de conocimiento matemático". Lo anterior nos da la pauta para plantear la idea central de este proyecto: identificar alguna de las epistemologías de prácticas que propiciaron "su producción" y "su uso" y que permitieron "su formalización" así como la "didactificación y la enseñanza" de la convergencia de sucesiones numéricas.

Puesto que el objetivo que se ha planteado la socioepistemología es: *“*estudiar la construcción de conocimiento situado, aquel que atiende a las circunstancias y a los escenarios socioculturales particulares, caracterizándolo como el fruto de las interacciones entre epistemología y factores sociales” (Cantoral, 2002), considerando la diversidad de escenarios posibles y acorde a las dimensiones desde donde se hacen los estudios, Buendía y Montiel (2011) proponen una unidad de análisis que plantea analizar la interacción entre la actividad observable de los individuos (el *uso* que se le da al saber), la intencionalidad explícita de transmitir un cierto conocimiento y el conocimiento matemático en juego relativo al escenario.

En la unidad de análisis que proponemos para nuestro trabajo el conocimiento matemático puede referirse a la convergencia de sucesiones numéricas, a lo sucesivo o a lo convergente, y nuestra tarea consistirá en identificar el *uso* [2] que se le daba a la convergencia de sucesiones numéricas, a lo sucesivo o a lo convergente en algunos escenarios socioculturales.

Posterior a la delimitación de ciertos escenarios socioculturales en los que se analizará en qué actividades y cómo se usaba la convergencia de sucesiones numéricas, se requerirá organizar la información encontrada orientada por dos preguntas: ¿en qué actividades se usó dicho conocimiento? y ¿cómo se dio la transmisión de ese saber? Para ello, Montiel (2005) propone un modelo basado en actividades, prácticas de referencia y prácticas sociales, puesto que abordar cierto concepto matemático implica tratar algo más amplio que solamente la definición, se trata de una problemática contextualizada.

Para Montiel (2005): Las actividades se refieren a aquellas observables tanto en los individuos como en los grupos humanos. Las prácticas de referencia son caracterizadas como un conjunto articulado de actividades, también como aquellas que permiten la articulación de la actividad con la práctica social. La práctica social es aquella que regula (norma) las prácticas de referencia y sus actividades relacionadas.

Por lo tanto, el estudio socioepistemológico que se realice llevará a plantear la construcción social que tuvo la convergencia de sucesiones numéricas, en particular en dicha construcción se pretenden identificar algunas prácticas sociales asociadas con el trabajo de lo sucesivo, de lo convergente, de la convergencia de sucesiones numéricas, las posibles prácticas de referencia que le dieron uso y sentido en su escenario sociocultural y aquellas actividades en las que se pueda identificar el uso que en cada escenario se le dio a la convergencia.

Elementos metodológicos

Para el desarrollo de nuestra investigación optamos por seguir el esquema metodológico para la investigación socioepistemológica que es presentado en Buendía y Montiel (2011) y que a continuación detallamos.

En el esquema presentado en la Figura 1 se parte de la identificación de “una problemática de estudio o un fenómeno didáctico particular donde se reconoce la necesidad por explicar un hecho escolar desde una perspectiva científica” (Montiel, 2005). Así, en un primer momento hemos reconocido la problemática alrededor del estudio de la convergencia de sucesiones numéricas, tema que se enseña en las licenciaturas en matemáticas. Enseguida planteamos la pregunta de investigación como *una* forma de acercarnos a la problemática, con el propósito de conocer, comprender y explicar procesos de construcción y transmisión de conocimientos matemáticos.

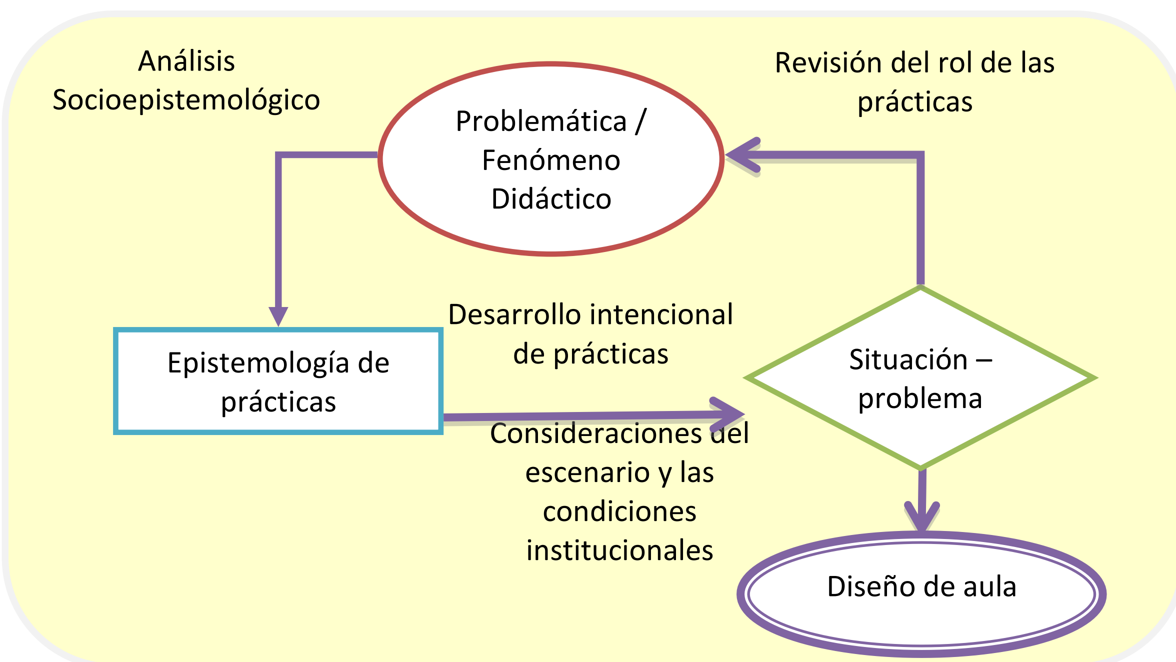


Figura 1. Esquema metodológico para la investigación socioepistemológica

Después de haber identificado cierta problemática, procederemos a realizar un estudio socioepistemológico. Con base en el trabajo de Rosas (2007) se han definido algunos de los escenarios socioculturales en los que hemos de distinguir los momentos de uso de lo convergente, de lo sucesivo y de la convergencia de sucesiones numéricas:

El de sus inicios prácticos (Periodo antiguo): La prehistoria, las culturas babilónicas, egipcias y griegos. Y el de sus fundamentos teóricos: nacimiento del cálculo, desarrollo, de la sistematización y de la fundamentación.

Además, nuestra intención es explicar esta relación entre el hombre haciendo matemáticas y el saber construido a través del modelo de prácticas propuesto por Montiel (2005)*: Práctica Social – Práctica de Referencia – Actividad*, pues hacer la investigación desde este acercamiento permitirá comprender a la convergencia de sucesiones numéricas como una construcción sociocultural: reconociendo la naturaleza y construcción social de la convergencia de sucesiones numéricas se estará priorizando la actividad humana.

Resultados. Primeros usos de la convergencia de sucesiones numéricas

Los inicios de la convergencia de sucesiones numéricas pueden encontrarse en actividades desarrolladas en diferentes culturas y que podrían no ser consideradas como matemáticas, en el sentido estricto de la palabra.

La prehistoria

Las actividades que dan inicio a los estudios de la convergencia son aquellas relacionadas en esencia con la resolución de las necesidades de la vida social y económica. En particular, encontramos que en la prehistoria el uso de "**lo sucesivo"** nace en la actividad de "contar". Otra de las actividades que marcó el uso de "las sucesiones" fue "el agrupamiento de signos" (rayas verticales, guijarros, dedos de la mano, etc.), pues al no haber un sistema numérico, el hombre creó sus maneras de contar, así como signos que representaran los números. Además, la actividad de "medir el tiempo" se constituye una actividad donde se comenzó a identificar "lo sucesivo", sobre todo al realizar actividades agrícolas, pues debían llevar la cuenta de los días y de las noches, así como de las estaciones del año.

Civilización Babilonia

Las actividades en las que usaron "las sucesiones" los babilonios estuvieron relacionadas con:

- "calcular la suma de series" con la particularidad de que éstas eran finitas y con
- "aproximar el valor de números irracionales", de raíces, a través de aproximaciones sucesivas y "aproximar el valor de π".

Civilización Egipcia

Con los egipcios el uso de lo sucesivo parece estar restringido solamente a la resolución de problemas aritméticos, ligados estrechamente con la actividad cotidiana de *repartir* alimentos. Además, el trabajo realizado por esta cultura nos permite identificar que las actividades en las que se usó "lo sucesivo" están relacionadas con

- Contar, agrupar y destinar símbolos específicos, dependiendo del sistema de numeración elegido (de base 10, no posicional)
- Aproximar el valor de π, a partir de la comparación con el área de un cuadrado

Los griegos

En esta civilización se construyeron varias sucesiones muy particulares, algunas finitas y otras infinitas para tratar de aproximar el valor de un número, y aunque en estos ejemplos el objetivo era descubrir a qué se aproximaba, la convergencia aún no era el centro de estudio. Así, las actividades en las que se usó lo sucesivo fueron:

- Al encontrar la suma de ciertas sucesiones (números figurados), pensando siempre en procesos finitos.

- Aproximación del valor de π a través del método exhaustivo.
- Creación de paradojas que incluían procesos infinitos.
- Cálculo de límites con relación a una progresión geométrica (en problemas como la "la cuadratura de la parábola" de Arquímedes y "Cálculo del área de una espiral").

Conclusiones

En este escrito se ha presentado un avance acerca de las actividades en las que se dieron los primeros usos de lo sucesivo y de lo convergente en el periodo antiguo, éstas están relacionadas de manera principal con medir el tiempo y repartir alimentos, pero además de eso, el hombre comenzó a hacer matemáticas desligándolas de actividades relacionadas con el quehacer cotidiano del hombre: al buscar la suma de ciertas sucesiones o al aproximar el valor de ciertos números irracionales, pero con la particularidad de que el tratamiento es con procesos finitos.

Sin embargo, se ha de reconocer que aún quedan aspectos por definir, por ejemplo, la organización de las actividades en prácticas de referencia y las prácticas sociales que norman las prácticas de referencia y sus actividades relacionadas.

Referencias

Alcock, L. y Simpson, A. (2005). Convergence of sequences and series 2: interactions between nonvisual reasoning and the learner's beliefs about their own role. *Educational Studies in Mathematics.* 58, 77-100.

Apóstol, T. (1974). *Calculus segunda edición. Vol 1.* USA: John Wiley & Sons.

Buendía, G. y Montiel, G. (2011). Propuesta metodológica para la investigación socioepistemológica. En Sosa, L., Rodríguez, R. y Aparicio E. (Ed), *Memorias de la XIV Escuela de Invierno en Matemática Educativa* (pp. 443 – 454). México: Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa.

Cabañas, G. (2011). El papel de la noción de conservación del área en la resignificación de la integral definida. Un estudio socioepistemológico. Tesis doctoral no publicada. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN, México.

Calvillo, N. (2007). *Convergencia de sucesiones numéricas: una visión alternativa.* Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN, México.

Camacho, A. (2006). Socioepistemología y prácticas sociales. *Educación Matemática.* 18 (1), 133 – 160. (Visitada el día 24 de noviembre de 2011 en: http://redalyc.uaem.mx/pdf/405/40518106.pdf).

Cantoral, R. (2002). La sensibilidad a la contradicción: un estudio sobre la noción de logaritmo de números negativos y el origen de la variable compleja. En C. Crespo (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 15 (1), 35-42. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. y Farfán, R.M. (2004). La sensibilité à la contradiction: logarithmes de nombres négatifs et origene de la variable complexe. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 24 (2.3), 137-168.

Downs, M. & Mamona-Downs, J. (2000). On graphic representation of differentiation of real functions, *THEMES in Education* 1(2), 173-198.

Montiel, G. (2005). *Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica.* Tesis de doctorado no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN, México.

Robert, A. (1982). L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* 3 (3), 305 – 341.

Roh, K.H. (2008). Students' images and their understanding of definitions of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics*. 69, 217 – 233.

Rosas, A.M. (2007). *Transposición didáctica de las series numéricas infinitas. Una caracterización del discurso escolar actual en el nivel superior.* Tesis de doctorado no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN, México.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics.* 18, 371 – 397.

Przenioslo, M. (2005). Introducing the concept of convergence of a sequence in secondary school. *Educational Studies in Mathematics.* 60, 71 – 93.

Przenioslo, M. (2004). Images of the limit of function formed in the course of mathematical studies at the university. *Educational Studies in Mathematics.* 55, 103 – 132.

[1]Siguiendo a Tall y Vinner, Przenioslo (2004, p. 104) entiende el concepto de "'imagen del concepto' como la estructura cognitiva que contiene todo tipo de asociaciones y conceptos relacionados con el concepto (también relacionado con sus propiedades y teoremas), incluyendo las intuiciones, los elementos de entendimiento formal, los patrones establecidos, los procedimientos aplicados en diferentes situaciones y estrategias operativas"

[2]Según Cabañas (2011) los usos son las formas en que es empleada o adoptada determinada noción en un contexto específico

Espacio Vectorial: Un Análisis Socioepistemológico

Sergio Raymundo Betanzos Sarmiento
Facultad de Ingeniería

Resumen

El presente trabajo es un avance en la investigación titulada “Análisis Socioepistemológico del Espacio Vectorial” en la cual se detalla la manera en que pretendemos abordarla. Estamos interesados en este concepto ya que sabemos que presenta dificultades en el aprendizaje en alumnos universitarios, cuyas licenciaturas están cargadas fuertemente de contenido matemático, debido a factores como lo abstracto del mismo y su naturaleza generalizadora y unificadora. Nos interesa pues conocer la génesis del Espacio Vectorial y profundizar en cómo éste fue construido.

Para lograr esto hacemos una revisión de los principales trabajos que aportan información para el desarrollo de nuestra investigación de manera significativa, buscaremos en dichos trabajos los personajes, conceptos, trabajos, matemáticos clave y las prácticas sociales que dieron forma a esta estructura Matemática.

Nos apoyaremos de la Socioepistemología para poder entender cómo fue construido en sociedad este concepto, las actividades matemáticas que hicieron posible dicha estructura, para entonces poder explicar la transposición del saber, ya que consideramos que con estos elementos nuestra investigación nos dará herramientas que facilitarán la construcción del concepto en los alumnos. Haremos uso del esquema metodológico de Montiel y Buendía (2012).

Palabras clave: Socioepistemología, Espacio Vectorial, Práctica social

Antecedentes

Uno de los antecedentes para esta investigación lo encontramos en Parraguez (2009), una tesis doctoral de interés para nosotros porque recoge en los primeros capítulos información importante relativa al nacimiento del concepto Espacio Vectorial (EV), esta investigación se centra en una descomposición genética del concepto EV a través del ciclo de investigación planteada por la teoría APOE compuesta por tres componentes: Análisis teórico, Diseño y Aplicación de instrumentos y, Análisis y verificación de datos.

Con base en dicho análisis teórico diseñamos dos instrumentos: un cuestionario diagnóstico y una entrevista buscando detectar las construcciones que habíamos considerado en la descomposición genética preliminar, eligiendo las preguntas de tal manera que permitirían obtener información profunda respecto a la manera de pensar de los estudiantes. Estos instrumentos fueron aplicados a los estudiantes matriculados en el programa de Licenciatura en Matemáticas en el Instituto de Matemáticas (IMA) de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (PUCV-Chile). El análisis de los resultados obtenidos con estos datos empíricos nos permitieron refinar nuestro análisis teórico y presentar una descomposición genética mejorada. Este análisis teórico además de ser un modelo de aprendizaje representa una herramienta didáctica que señala estrategias de enseñanza del concepto espacio vectorial (Parraguez, 2009, pp. 9-10).

Esta investigación además de la descomposición genética que aporta, sugiere estrategias en las conclusiones que dan alternativas para construir este concepto matemático tal como se menciona en la cita anterior. La investigación nos advierte de lo complejo de la construcción de tal concepto en el devenir del tiempo.

Hoy en día, es la culminación de un largo y accidentado proceso de evolución histórica, durante el cual este concepto y otros conectados con él (independencia y dependencia lineal, base, dimensión, transformación lineal, etc…) se encontraban implícitos en diferentes contextos de la matemática o la física. (Parraguez, 2009, p. 13)

Es importante señalar que prácticamente es nula la información existente acerca de los orígenes del espacio vectorial hasta Gray (1980) (Parraguez, 2009) y sin embargo contrastarlo con el hecho de cómo el concepto es introducido en la escuela a través de textos universitarios.

Un ejemplo de ello, es un primer curso de álgebra lineal para Licenciatura en Matemática, en la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso-Chile (PUCV), donde el concepto de espacio vectorial suele introducirse mediante explicaciones relacionadas con la definición de espacio vectorial V sobre un cuerpo K. Dicho procedimiento de explicación consiste en aclarar qué significa que (V,+) tenga estructura de grupo . (Parraguez, 2009, p. 13)

Coincidimos con la autora cuando afirma que a opinión de los profesores este acercamiento al concepto que es abstracto hace de su aprendizaje un proceso lento y en muchos casos el estudiante no tiene claro en su mente la serie de requisitos que debe tener V para ser un espacio vectorial sobre K. Esto plantea dificultades en el estudiante al momento de enfrentarse con el concepto al respecto los autores comentan:

Se sabe que las dificultades que muestran los estudiantes para alcanzar una adecuada comprensión de los conceptos del álgebra lineal, en particular el de espacio vectorial tienen orígenes diversos; uno de ellos es el epistemológico: el concepto de espacio vectorial no fue creado para resolver problemas, sino para unificar y generalizar métodos y conceptos ya existentes (Dorier 1990, 1995a, 1995b)… Una primera tentativa en revelar las fuentes de las dificultades de los estudiantes en álgebra lineal, a través de un análisis histórico y epistemológico se puede encontrar en Robinet (1986). El trabajo en esta dirección fue seguido por Dorier (1995a; 1996; 1997 y 2000). Estas investigaciones no solamente sirvieron como referencia para una mejoría de los errores y las dificultades de los estudiantes, sino también se han utilizado como inspiración para diseñar actividades para los estudiantes. Particularmente un resultado de estas investigaciones es el referido con la fase pasada de la génesis de la teoría de espacios vectoriales. Las raíces de este paso final se pueden encontrar a fines del siglo diecinueve, pero realmente comenzó solamente después de 1930. (Parraguez, 2009, p. 15-16)

Resaltamos de los párrafos anteriores lo que para nosotros es un supuesto de investigación al considerar que el concepto fue creado de una necesidad para unificar y generalizar métodos y conceptos ya existentes. Atendiendo a estas dificultades el trabajo de Parraguez propone:

En nuestra opinión, para el entendimiento de espacio vectorial, se requiere además del dominio de las definiciones y de ciertas técnicas específicas, de la comprensión de las propiedades y teoremas que hacen evolucionar la teoría matemática del álgebra lineal, así como de un manejo equilibrado entre el desarrollo conceptual con el tratamiento algorítmico. (Parraguez, 2009, p. 15)

Tal manejo equilibrado en nuestra opinión no existe en el discurso actual como por ejemplo en las carreas de Ingeniería en donde el tratamiento algorítmico se ve privilegiado o en las carreras de Matemáticas o Física en la que se recae el mayor peso en la teoría Matemática.

Investigaciones han reportado que el discurso matemático escolar del álgebra lineal privilegia el tratamiento algorítmico a través de las llamadas técnicas de resolución, en deterioro de la comprensión de nociones básicas (Dorier y Sierpinska, 2001; Sierpinska et al., 2002). (Parraguez, 2009, p. 16)

Otro antecedente en particular de suma importancia la hemos identificado en Dorier (1995) que es uno de los referentes en la génesis del concepto de espacio vectorial, en esta investigación se habla de la génesis del EV a través de una revisión histórica en donde resaltan personajes como Gabriel Cramer que sienta las bases de la teoría de los determinantes, Euler que aborda las curvas algebraicas desde la paradoja de Cramer, Frobenius con quien el concepto de rango alcanzó su madurez entre otros.

En el capítulo de "Estudios Relacionados con el Concepto de Espacio Vectorial Parraguez (2009) argumenta respecto de Dorier:

Un análisis epistemológico cuidadoso lleva a Dorier (1990, 1995a y 1995b) a la conclusión de que el concepto de espacio vectorial pertenece a una clase de conceptos que él llama "unificador y generalizador" porque no fueron creados para resolver problemas, sino para unificar y generalizar métodos y conceptos ya existentes. Basado en este análisis propone un ambiente para que los estudiantes lleguen a establecer por sí mismos los axiomas que definen un espacio vectorial. (Parraguez, 2009, p. 22)

Nos interesa abordar el análisis de este y trabajos de Dorier de carácter epistemológico desde nuestro marco teórico para poder dar nuestra propia interpretación de los hechos y poder entender la transposición de estos saberes.

Problema de investigación

Es un hecho para nosotros que el concepto de Espacio Vectorial es un concepto complejo en su construcción como en la teoría Matemática que la acompaña, sabemos que los alumnos Universitarios que ven por primera vez este concepto presentan dificultades en el aprendizaje del mismo, que tampoco ven un gran campo de utilidad en su uso y que la manera en cómo está presente en el discurso escolar colabora en que esto suceda.

En relación a estas dificultades en Parraguez (2009) hace mención de los resultados de investigadores franceses entre ellos (Dorier, 1998) en donde afirma:

Estos autores concluyen que "para la mayoría de los estudiantes, el álgebra lineal es sólo un catálogo de nociones muy abstractas que ellos no manejan". Por otro lado, ellos nos advierten de la dificultad para encontrar las situaciones al nivel de los estudiantes donde los conceptos del álgebra lineal jugarían el papel de herramienta para resolver problemas. Este hecho está unido con la naturaleza generalizadora y unificadora del Álgebra Lineal. (Parraguez, 2009, pp. 16-17)

Por ello la presente investigación pretende analizar el concepto de Espacio Vectorial desde su génesis para conocer su proceso de construcción hasta la estructura que tiene actualmente, si bien es conocido que la preocupación por dicha génesis es reciente creemos que esta investigación puede aportar de sugerencias didácticas que ayuden a la construcción del concepto de Espacio Vectorial en los alumnos al abordarlo desde una aproximación Socioepistemológica.

Es por tal preocupación que nuestra investigación ha sido motivada por los siguientes supuestos:

• Existe dificultad en los alumnos universitarios en el aprendizaje del espacio vectorial.

• El concepto de espacio vectorial nace de la necesidad de unificar métodos y teorías.

Así mismo las correspondientes preguntas de investigación:

• ¿Cuál es la génesis epistemológica del concepto espacio vectorial?

• ¿Cuáles son las prácticas sociales que dieron origen al concepto de espacio vectorial?

Para poder responder estas preguntas nos centraremos únicamente en el concepto “Espacio vectorial” que será nuestro objeto de estudio.

OBJETIVOS:

Objetivo general:

Se buscará en el proceso de construcción del E.V. las prácticas sociales subyacentes al concepto mediante un análisis Socioepistemológico.

Objetivos particulares:

Análisis histórico de la génesis del concepto

Identificación de las categorías de análisis para la elaboración del análisis Socioepistemológico.

Marco Teórico

La Socioepistemología como aproximación teórica

Retomamos esta teoría en la investigación debido a que recientemente ha tenido mucho peso en la comunidad científica específicamente en la de Matemática educativa en México el conocer cómo se construye socialmente el conocimiento matemático. Esta teoría surge en el cruce de caminos entre Matemáticas, Ciencias Sociales y Humanidades en un intento para explicar las relaciones entre mente, saber y cultura en el campo de las Matemáticas apoyándose de la noción de práctica social (Cantoral, 2013).

Al respecto Cantoral sostiene que las prácticas sociales son el producto de un análisis, no de una observación que se debe hacer un estudio sistémico del saber que ponga a las cuatro dimensiones (epistemológica, cognitiva, didáctica y social) de la teoría de forma articulada, en las investigaciones que su grupo de colaboradores han hecho rescatamos lo siguiente afirmación:

se encontró que en curso del tiempo la predicción fue una actividad práctica utilizada para un sinfín de actividades, tanto para la anticipación de cometas, como el establecimiento de ciclos de quema, barbecha, siembra y cosecha en la producción de maíz, trigo y caña, hasta la predicción del cazador sobre los movimientos de su presa o en el establecimiento analítico de leyes naturales en física clásica (Cantoral, 2013, p. 157).

Es decir al no poder manipular el tiempo a voluntad en este caso adelantarlo para saber qué ocurrirá una estrategia funcional sería la de predecir, aquí la práctica social de predicción adquiere un carácter de normativa para las actividades señaladas es entonces que entra en juego la norma que en palabras de Cantoral debemos entenderla como un emergente social que regula al desarrollo del sistema.

Un modelo de práctica social de interés en nuestra investigación la encontramos en (Montiel, 2005) en la manera que aborda la construcción social de la función trigonométrica en base a tres entidades la práctica social, la práctica de referencia y la actividad, Montiel afirma que la práctica de referencia consiste de un conjunto de actividades reguladas por la práctica social.

Figura 1. Modelo de práctica social (Fuente: Montiel, 2005, p. 101)

En el trabajo de Montiel se identifican tres prácticas de referencia: la matematización de la astronomía, la matematización de la física y la matematización de la transferencia de calor que tienen sus respectivas prácticas sociales que las regulan: Anticipación, predicción y formalización como podemos ver en la siguiente figura.

Figura 2. Modelos de prácticas sociales en la función trigonométrica (Fuente: Montiel, 2005)

En estos modelos elaborados en la investigación de Montiel podemos decir que sus prácticas de referencia corresponden a momentos o episodios en el devenir de la construcción de la función trigonométrica. En contraste con nuestra investigación hemos encontrado en (Dorier y Sierpinska, 2001) que podemos distinguir dos fases en la construcción del concepto EV: unificación (poner juntos varios saberes para crear un todo) y generalización por lo cual consideramos pertinente el modelo anterior ya que consideramos poder encontrar en estas dos fases las actividades matemáticas involucradas y la práctica social que las norma.

Metodología

Para la realización de nuestra investigación proponemos la siguiente metodología

- Hacer un análisis documental
- Ubicar periodos de tiempo en donde se revisará el concepto
- Identificación de las prácticas sociales en dichos periodos.
- Elaborar el esquema para presentar el análisis Socioepistemológico.

Se requiere hacer un análisis, histórico, epistemológico profundo del concepto EV para identificar los elementos clave que permitieron la construcción de esta estructura, por lo que seguiremos los principales trabajos en relación a ello, Dorier, Robinet , Sierpinska etc, además de analizar los principales trabajos matemáticos en ese sentido delos principales personajes que construyeron los conceptos clave como Cramer, Euler entre otros, con ello pretendemos encontrar actividades matemáticas que nos permitan dividir en periodos la evolución del EV y encontrar las prácticas sociales que norman dichos periodos.

Para apoyarnos en este análisis Socioepistemológico haremos uso del esquema metodológico planteado por (Montiel y Buendía, 2012) ya que se reportan como exitosas las investigaciones hechas a la luz de este enfoque.

Figura 3. Esquema metodológico (Fuente: Buendía, Montiel, 2012)

El Esquema Metodológico … pretende concordar con un conjunto de supuestos iniciales propios de la investigación socioepistemológica ... La Socioepistemología se ha propuesto como tarea fundamental estudiar la construcción de conocimiento situado, aquel que atiende a las circunstancias y a los escenarios socioculturales particulares, caracterizándolo como el fruto de las interacciones entre epistemología y factores sociales … Nos interesa, entonces, identificar aquello que norma la actividad humana de la que emerge conocimiento matemático, a lo que en el enfoque se ha denominado como práctica social, y se caracteriza como aquello que nos hace hacer lo que hacemos (Covián, 2005). La consideración de una epistemología de orden social da al enfoque su nombre: Socioepistemología (Cantoral & López-Flores, 2010). La Socioepistemología se ha constituido como un enfoque teórico para entender y comprender, al seno de la Matemática Educativa, fenómenos específicos relacionados con la construcción y transmisión de conocimiento matemático (Buendía y Montiel, 2011, pp. 62-63).

En las investigaciones de corte Socioepistemológico se han encontrado que el saber matemático ha sido problematizado en al menos tres dimensiones o bien principios metodológicos: su naturaleza epistemológica, su resignificación y sus procesos de transmisión.

… Estos estudios han propuesto unidades de análisis centradas en la actividad humana y en las circunstancias que le rodean. Ello les ha permito formular que el ejercicio de prácticas antecede a la producción de conceptos y en consecuencia, la unidad de análisis propuesta permite identificar dichas prácticas. Esto es, lo que se estudia es al ser humano usando y haciendo matemáticas, y no sólo su producción matemática, para proponer epistemologías de prácticas que fundamenten el desarrollo del pensamiento matemático. (Buendía y Montiel, 2011, p. 64).

Entendemos entonces que la unidad de análisis es particular a cómo se problematizó el saber matemático es decir su dimensión y en el caso de nuestra investigación nos interesa caracterizarla ya que como se menciona en la cita anterior esta unidad permite identificar a las practicas.

Las autoras plantean que debido la diversidad de escenarios posibles y acorde a las dimensiones desde donde se hacen los estudios, se puede inferir una unidad de análisis con la intención analizar la interacción entre la actividad observable de los individuos, la intencionalidad explícita de transmitir un cierto conocimiento y el conocimiento matemático en juego relativo al escenario.

Figura 4. Una unidad de análisis (Fuente: Buendía, Montiel, 2012)

En relación con la unidad de análisis las autoras mencionan que si el estudio Socioepistemológico está situado en el aula la unidad de análisis seria la interacción del sistema didáctico es decir el uso que hace el alumno del saber en interacción con el profesor y su papel en la transmisión del saber.

Hemos dicho que nos apoyaremos del esquema metodológico planteado por Buendía y Montiel (ver fig. 3) aunque pretendemos dado a la naturaleza de nuestra investigación trabajar en el momento que las autoras han denominado epistemología de prácticas.

Figura 5. Epistemología de prácticas (Fuente: Buendía, Montiel, 2012)

Como las autoras mencionan al describir el esquema y decir que los nodos son momentos o fases de un proceso de la investigación global que incluye un conjunto de tareas propias y las flechas representan acciones que relacionan a los diferentes momentos, y nos señalan que una tesis o proyecto de investigación pudiera estar compuesto por un nodo y/o la combinación de algunos nodos de momentos y acciones relacionantes del esquema tal como ocurre en la figura 5, en el que tomamos la parte que se ha nombrado como el momento de Epistemología de prácticas las autoras comentan al respecto de este momento:

Como resultado de un análisis Socioepistemológico, algunas investigaciones concluyen proponiendo una epistemología de prácticas para formular una explicación acerca de la Problemática educativa en cuestión o para dar una visión alternativa con relación al fenómeno didáctico que se estudia; pero además, se conforma como una primera base para la intervención didáctica. Por ejemplo, en las investigaciones de Montiel (2005, 2011) se propuso una primera epistemología de prácticas que distingue escenarios y circunstancias para la construcción de las herramientas trigonométricas. (Buendía y Montiel, 2012, p. 72)

El análisis Socioepistemológico o revisión Socioepistemológica también es caracterizada por las autoras con el siguiente diagrama:

Figura 6. Análisis Socioepistemológico (Fuente: Buendía, Montiel, 2012)

En nuestra investigación el análisis Socioepistemológico debido al tipo de investigación consideramos que recae en la dimensión de Naturaleza epistemológica del saber pues esta clase de investigaciones tienen un corte más histórico-epistemológico que en palabras de las autoras no quiere decir la solo relatoría de hechos históricos sino la búsqueda de las circunstancias socioculturales que rodean la generación de conocimiento matemático.

Conclusiones

En la investigación aunque no se ha encontrado la o las prácticas sociales de manera evidente por lo cual no se han etiquetado aún, se están trabajando en caracterizar las diversas actividades matemáticas para encontrar aquellas que tácitamente envuelvan al proceso de construcción del E.V.

Trabajaremos en primera instancia en dos momentos de la construcción del E.V. que antes se han mencionado como Unificación y Generalización dichos periodos a priori pudieran ser la base de las prácticas sociales para ello falta más análisis, principalmente diremos que estamos buscando normar en los conceptos de combinación lineal, dependencia-independencia, rango-dimensión, transformación lineal así como en el proceso de axiomatización y teorización.

Bibliografía

Cantoral, R. (2013). Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento, 1ª Edición. Barcelona: Gedisa.

Dorier, J. L. (1995). A general outline of the genesis of vector space theory. Historia Mathematica, 22(3), 227-261

Dorier, J. L. (1998). The role of formalism in the teaching of the theory of vector spaces. Linear Algebra and its Aplications (275), 1 (4), 141-160

Montiel, G. (2005). Estudio Socioepistemológico de la Función Trigonométrica. Tesis de doctorado no publicada. Centro de Investigación en ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada «CINVESTAV». México, D.F.

Montiel, G. y Buendía, G. (2012). Un esquema metodológico para la investigación socioepistemológica: Ejemplos e ilustraciones. En A. Rosas y A. Romo (Eds.), Metodología en Matemática Educativa: Visiones y reflexiones (pp. 61-88). México: Lectorum.

Parraguez , M. (2009) Evolución Cognitiva del Concepto Espacio Vectorial. Tesis de doctorado no publicada. Centro de Investigación en ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada «CINVESTAV». México, D.F.

Marcos Epistémicos En Una Actividad Para La Clase De Matemáticas Y De Física: La Ley De Hooke

Pabón, Carlos - *Galindo, Fabián - Soler, Nubia*
carlospab@gmail.com – fabianaristo@gmail.com - nsoler@gmail.com
Universidad Pedagógica Nacional (Colombia)

RESUMEN

Se aborda el análisis de los recursos epistémicos a través de los procesos argumentativos de un grupo de estudiantes de dos colegios oficiales de Bogotá, Colombia, al introducir un problema que involucra el uso de recursos de las matemáticas y la física. Este problema consiste en estudiar la aplicabilidad de la ley de Hooke para el caso de bandas elásticas de caucho. Se acude a la propuesta de Bing y Redish (2009) que se refiere a los marcos epistémicos que emergen en los estudiantes al abordar la solución de problemas en física. Se toman los garantes del modelo de argumentación de Toulmin como un medio para encontrar tales marcos. En esta propuesta de problema, se desarrollaron tres fases experimentales: experimento mental, experimento virtual y experimento real.

Palabras clave: Interdisciplinariedad, marcos epistémicos, modelo argumentativo de Toulmin, Marco de recursos, Resolución de problemas

Planteamiento del Problema

Los autores, en consideración a su experiencia profesional en sus clases de física y matemáticas, evidencian las dificultades que presentan los estudiantes de los colegios públicos en los que laboran, a la hora de abordar problemas que requieren el uso de las matemáticas para su solución. Asimismo, consideran que los estudiantes acorde con su época no se muestran interesados o no le dan valor al tipo de clase tradicional que emerge de las organizaciones curriculares que no han cambiado sustancialmente a lo largo del tiempo. Así por ejemplo, si los profesores intentan ceñirse a determinados textos tradicionales o a sus métodos, la desmotivación del estudiante puede convertirse en un gran obstáculo para el proceso de enseñanza aprendizaje y este factor puede derivar incluso en problemas de corte social al interior de la clase. En otras ocasiones, cuando los profesores han intentado presentar su clase dentro del paradigma del ejercicio, encuentran que el estudiante se siente cómodo con la repetición de ciertos procedimientos previamente mostrados y explicados por el profesor, asume que aprendió o entendió, pero cuando es cuestionado por asuntos conceptuales que pueden inducirse, deducirse o construirse a partir de los ejercicios explicados, no elaboran, por ejemplo, procesos de generalización, conjeturación ni argumentación. Esta situación se hace notoria a la hora de resolver problemas en física en donde es común observar dificultades a la hora de argumentar determinadas afirmaciones.

El problema, la forma de abordarlo, las relaciones entre sus elementos, los conocimientos que se necesitan para resolverlo, determinan los recursos que usa el estudiante para su solución. Estos recursos son los que se pretende evidenciar mediante la secuencia de actividades que se plantea para estudiantes de ciclo V (grado once o último año de secundaria) de dos colegios oficiales de Bogotá, con edades comprendidas entre los 15 y 17 años de edad. En esta secuencia se propone estudiar la aplicabilidad de la ley de Hooke a una banda elástica y se pone en discusión cómo cambia la elongación con el número de CDs al pasar de esta primera situación a un sistema de dos bandas en serie o dos bandas en paralelo. Esta actividad permite explorar las diferentes afirmaciones, datos y garantes que aparecen en los argumentos de los estudiantes de acuerdo con el modelo de Toulmin, así como los recursos epistémicos usados, entendidos como el conjunto de nociones, conocimientos empíricos, entre otros, que se encuentran fuerte o débilmente ligados en la mente de cada estudiante al abordar un problema (Bing & Redish, 2009) y el marco de recursos que usan en cada una de las fases experimentales.

La investigación, en sus primeros pasos, buscaba comprender las dificultades de los estudiantes al resolver problemas de índole demostrativo en el marco de la física. Inicialmente, se presentó a los estudiantes una guía (tipo libro de texto) en la que se pedía un análisis centrado en una gráfica acerca del comportamiento de un resorte y la ecuación que define la ley de Hooke. Se encontró que los estudiantes en la mayoría de los casos presentaban desconocimiento de la temática, dificultad para responder a preguntas de tipo argumentativo, su interpretación de la gráfica era errónea y mostraban escaso manejo del lenguaje escrito, por lo que no fue posible evidenciar los recursos y argumentos de manera adecuada. Esto dejó ver, por tanto, un inadecuado planteamiento de la actividad, lo que llevó a los autores a un replanteamiento de la misma que terminó en una serie de experimentos con bandas elásticas y discos compactos, que son elementos de uso cotidiano para los estudiantes y les permiten un acercamiento más íntimo al trabajo del físico actual, desde el punto de vista de lo que Jahnke (2005) denomina la *metáfora del físico teórico*. Las actividades que se proponen constituyen, por tanto, una secuencia de aprendizaje en la que las respuestas de los estudiantes permiten al educador develar los mecanismos de razonamiento para resolver un problema, entendido no como un ejercicio de libro de texto sino como una pregunta elaborada de investigación (Gil Pérez, Martínez Torregrosa, & Senent Pérez, 1988).

Marco Teórico

En este análisis se toma como referente el modelo RF (Resource Framework) descrito por Bing y Redish (2009) que consiste en una estructura para crear modelos fenomenológicos de alto nivel de pensamiento. Este permite analizar el resultado de la interacción del estudiante con su entorno mediante una especie de red de recursos epistémicos similar a lo que ocurre dentro de una red neuronal. El RF es un modelo cualitativo para describir el desarrollo epistemológico que se da en los estudiantes a través de los recursos que ellos van encerrando a los estrictamente necesarios para describir determinada situación o fenómeno o para resolver un problema. Esta red tiene un carácter dinámico, con estructura de control y ligazón (*binding*). Si los recursos están fuertemente ligados, estos siempre tienden a activarse juntos, pero si están débilmente ligados estos pueden ser reemplazados por otros fácilmente y formarse nuevos conglomerados de recursos. En una red asociativa, la ontología básica es la de una red con sus nodos y conexiones direccionales.

La activación de conocimiento se interpreta como la activación de conglomerados de elementos (recursos epistémicos) vinculados que pueden imaginarse como neuronas. La asociatividad se refiere al estrecho vínculo entre los recursos que trae consigo el hecho de que la activación de uno de estos elementos o de un conglomerado de ellos implique inevitablemente la activación de otros elementos o conglomerados de elementos. Por ejemplo, en ocasiones el estudiante recurre al recurso de la proporcionalidad ligado al de la suma, pero esta ligazón es débil en comparación con una cadena en la que la proporcionalidad se activa conjuntamente con la multiplicación, pues en esta última cadena se activan más recursos en tanto que explica más situaciones relativas a la proporcionalidad. Estas situaciones también pueden ser consideradas como recursos (por ejemplo las situaciones conocidas previamente por el estudiante, en las que ha usado la proporcionalidad en otros contextos).

La red en cuestión no es simplemente asociativa. Existen además, como en la red de neuronas del cerebro, estructuras que parecen tener propósitos específicos (como en el cuerpo tienen funciones específicas el hígado o los pulmones). Las estructuras de control dependen en buena medida tanto de la asociación como de la inhibición. Algunos ejemplos de estructuras de control, de acuerdo con este modelo, son: atención selectiva, dependencia del contexto, enmarcado, epistemología y metacognición. La asociación o inhibición de uno o más recursos en la red, depende fuertemente del contexto.

El principio de ligazón consiste en el hecho de que los conglomerados de recursos que con frecuencia se activan juntos, se ligan fuertemente de modo que siempre se activan conjuntamente. Este principio hace posible la creación de redes de estructuras de alto nivel que el sujeto percibe como un todo. Ejemplos de estas son los conceptos, los esquemas y los primitivos fenomenológicos (*p-prims*) (diSessa, 1988).

El carácter dinámico del marco de recursos es entendido en este modelo, justamente como la hecho ya mencionado de que las asociaciones e inhibiciones dependen fuertemente del contexto, de manera que éstas redes pueden mutar y formar nuevos conglomerados con el cambio de contexto.

Del entramado propuesto en el marco de recursos, Bing y Redish (2009) centran su atención en los enmarcados epistémicos (*epistemic framing*), referentes al juicio o percepción que tiene el estudiante acerca de los conocimientos, habilidades o herramientas que requiere a la hora de abordar una determinada situación o problema.

Bing y Redish (2009) sostienen que los enmarcados pueden identificarse a partir de los garantes de acuerdo con el modelo de Toulmin, éstos emergen cuando los estudiantes construyen sus argumentos acerca del problema o situación que se le plantea. Aunque aplican sus investigaciones a los argumentos que aplican en estudiantes universitarios, es posible que este modelo pueda ser aplicado para el estudio de lo que pasa a nivel de estudiantes de secundaria. En su trabajo, determinan varios enmarcados, que pueden cambiar en el transcurso de una discusión o por influencia de un factor externo (el contexto): enmarcado físico, enmarcado de cálculo, enmarcado de autoridad y enmarcado de consistencia matemática.

Metodología

Por orientarse hacia el análisis de una práctica en el ambiente natural de la clase que no desconoce aspectos del contexto de los estudiantes, esta investigación puede clasificarse como de tipo cualitativo. Es una investigación aplicada en tanto que acude directamente a la actividad matemática desarrollada por los estudiantes en el aula. Los participantes de la investigación (además de los autores, en calidad de investigadores) son 90 estudiantes de grado once de los colegios San Isidro Sur Oriental y Julio Garavito Armero, dos instituciones educativas oficiales de la ciudad de Bogotá, Colombia.

El trabajo gira en torno a las situaciones que a continuación se describen: se suspende de una banda de caucho un CD y se aumenta progresivamente su número. El interés es estudiar el comportamiento de la elongación de la banda de caucho conforme se aumenta el número de CDs suspendidos. Una segunda situación consiste en considerar la misma relación para dos bandas de idéntica elasticidad conectadas en serie (salvo el experimento real en el que justamente se deja lugar para la discusión sobre las bandas idénticas), y una tercera con las bandas conectadas en paralelo. Cada una de estas situaciones se abordó en tres momentos de diferente naturaleza:

- Experimento mental: cada estudiante imagina cada una de las tres situaciones mencionadas y hace estimaciones de la elongación de la banda o las bandas, recurriendo exclusivamente a su intuición y experiencia previa con bandas de caucho y CDs. El estudiante completa, para cada sistema, una tabla en la que se le solicita indicar su estimación de la elongación para un incremento en la cantidad de CDs: comenzando con 1 y terminado con 10 CDs, de uno en uno.

- Experimento virtual: se presenta a los estudiantes una simulación en GeoGebra en la que se muestra la elongación de las bandas de caucho en cada una de las tres situaciones cuando se asume como válida la ley de Hooke. Mediante un deslizador, el número de CDs aumenta desde 0 hasta 10. Los estudiantes (reunidos por grupos de 3 o 4 personas) completan una serie de tablas y responden algunas preguntas para las tres situaciones en cuestión, esta vez la variación en las tablas cambia, no necesariamente se aumenta la cantidad de CDs de uno en uno.

- Experimento real: los estudiantes, reunidos en grupos de 3 o 4, completan algunas tablas similares a los dos experimentos anteriores y responden preguntas similares a las del experimento anterior, pero esta vez miden directamente la elongación utilizando bandas de caucho, Cds reales y una regla (Los demás accesorios para construir los sistemas se dejan a la imaginación de cada grupo).

Finalmente, se llevó a cabo una discusión final que recogía conclusiones y observaciones obtenidas por los estudiantes al concluir el trabajo de los tres experimentos en la que cada grupo y estudiante aportaba sus ideas sobre la aplicabilidad de la ley de Hooke y sus ideas en cada una de las fases.

El registro de la información se hizo a través de los escritos de los estudiantes en el caso del experimento mental, de grabaciones de audio y vídeo de los grupos de trabajo para los experimentos virtual y real.

Desarrollo de la Propuesta

El análisis de los datos obtenidos se encuentra actualmente en desarrollo. Se determinaron algunas categorías asociadas a los recursos que se evidencian a través de los argumentos de los estudiantes, a saber, la proporcionalidad, las cualidades físicas de bandas y CDs y la medición.

En el caso particular de los recursos asociados a la proporcionalidad se hizo una primera clasificación de los tipos de sucesiones que los estudiantes obtuvieron al desarrollar el experimento mental. A pesar del hecho de que la ley de Hooke supone que sólo es posible una sucesión de tipo lineal de la elongación comparada con el incremento en el número de Cds, se identificaron ocho tipos de sucesiones diferentes:

#	TIPO DE SUCESIÓN	DESCRIPCIÓN
1	Lineal de valor inicial y razón iguales	Sucesión de tipo lineal en la que el primer término tiene el mismo valor que el incremento o razón. Es el caso que se corresponde con lo que afirma la ley de Hooke.
2	Lineal de valor inicial y razón diferentes	Sucesión de tipo lineal en la que el primer término no coincide con el incremento o razón. Más precisamente, es lineal a partir del segundo término.
3	Lineal de valor inicial cero	Es un subtipo de la anterior, salvo que el primer término es cero, lo cual puede interpretarse como que el estudiante considera que un solo CD no tiene peso apreciable.

4	Inicialmente lineal con valor inicial y razón iguales	Sucesión cuyos valores iniciales corresponden a una sucesión lineal (con primer término e incremento iguales), pero a partir de un momento determinado dentro del intervalo en consideración, se pierde la linealidad.
5	Inicialmente lineal con valor inicial y razón diferentes	Sucesión de comportamiento similar a la tipo 2, excepto porque a partir de un cierto término dentro del intervalo considerado la linealidad se pierde.
6	Geométrica	Sucesión equivalente a una progresión geométrica (cada término sucesor es el producto del término anterior multiplicado por una constante o razón).
7	Sucesión no lineal de variación escalonada constante, cada dos términos	Sucesión cuyos dos primeros términos son iguales y cada pareja subsiguiente de términos subsiguiente es el resultado de sumar a la anterior una constante.
8	Sucesión no lineal, creciente, de variación indefinida	Sucesión creciente en la que no se identifica una regla que permita determinar el valor de sus términos de acuerdo con su posición en la sucesión.

Tabla 1.

En cada uno de los tres experimentos se identifican los recursos, afirmaciones, garantes y encuadres epistémicos presentes de acuerdo con las respuestas de los estudiantes. En la tabla 2 se muestra un ejemplo de los recursos asociados a las afirmaciones de los estudiantes en el experimento mental, así como algunos argumentos, datos y enmarcados (framing)

DATOS	TIPO	AFIRMACIÓN	GARANTES	RECURSOS	ENMARCADOS
1 CD elonga la banda 1 cm	III	Cuando ponemos 1 CD se estira 1 cm y si colocamos 2 se estirará el doble.	Porque si uno hace elongar la banda 1 cm, dos lo hacen elongar 2 cm	Proporcionalidad lineal. Se pone en juego la idea de que la banda se comporta de manera uniforme a largo de todo el experimento	Enmarcado de cálculo en el que el o la estudiante simplemente realiza una multiplicación o una serie de sumas.

Tabla 2: Primera clasificación de los recursos y marcos usados por los estudiantes

Con base en las observaciones registradas en las tablas 1 y 2 se hizo una propuesta de clasificación de los argumentos de acuerdo con el uso que se hace de los recursos involucrados en sus argumentos.

Es importante anotar que en el experimento virtual, es decir, con el cambio de contexto, cambian los marcos de recursos que presentan los estudiantes, especialmente emerge un marco de autoridad respecto al applet que cuestiona al estudiante sobre sus creencias iniciales respecto a la proporcionalidad entre elongación y peso (número de CDs) y otras veces las reafirma.

Conclusiones

A partir de los resultados obtenidos hasta el momento, puede verse que es factible aplicar el modelo RF al estudio de los argumentos dados por los estudiantes al enfrentar el problema de la ley de Hooke para las bandas elásticas. Se han establecido las categorías esenciales mencionadas en el apartado anterior y se pretende construir las matrices por estudiante y por categorías que permitan visualizar tal categorización.

Aplicar el modelo RF para el análisis de la argumentación a nivel secundaria puede ser un recurso sumamente valioso para entender las dificultades de nuestros estudiantes y de esta manera dar luces de cómo concebir y aplicar secuencias y actividades didácticas más provechosas para el desarrollo de las clases de física y matemática dentro de un currículo que tienda a la transversalidad.

Referencias

Bing, T. J., & Redish, E. F. (2009). Analyzing problem solving using math in physics: Epistemological framing via warrants. *Phys. Rev. ST Phys. Educ. Res., 5*(2), 020108.

diSessa, A. (1988). Knowledge in pieces. En G. Forman, & P. B. Pufall, *Constructivism in the Computer Age.* New Jersey: Lawrence Erlbaum Publisher.

Gil Pérez, D., Martínez Torregrosa, J., & Senent Pérez, F. (1988). El fracaso en la resolución de problemas de física: una investigación orientada por nuevos supuestos. *Enseñanza de las ciencias, 6*(2), 131-146.

Jahnke, H. N. (2005). A genetic approach to proof. En M. Bosch (Ed.), *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, (págs. 428-437). Sant Feliu de Guíxols.

Toulmin, S. (2003). *Los usos de la argumentación.* (M. Morrás, & V. Pineda, Trads.) Barcelona: Ediciones Península.

Usos Y Resignificación Del Número Real En La Obra Matemática De René Descartes

María Alexandra Fregueiro, Gabriela Buendía Ábalos
Consejo de Formación en Educación-Uruguay Colegio Mexicano de M.E.
suresmeralda@hotmail.com, buendiag@hotmail.com

Resumen

Este trabajo presenta un análisis histórico-epistemológico del Libro I de la obra cartesiana “La geometría”. El objetivo principal de dicho análisis es identificar usos del número en la obra matemática de René Descartes y posibles resignificaciones que se deriven de estos usos. Otros de los objetivos de esta investigación es brindar una respuesta a: ¿cómo y por qué Descartes establece el tránsito entre los contextos aritmético, algebraico y geométrico?

La investigación se ubica dentro de la aproximación socioepistemológica. El objetivo principal de este enfoque radica en problematizar el saber matemático, estudiar la problemática que plantea la construcción social del conocimiento matemático y su difusión institucional. El análisis del saber problematizado se lleva a cabo considerando de manera integral cuatro dimensiones, la epistemológica, la didáctica, la cognitiva y la social.

En particular el trabajo se apoya en la noción de *uso del conocimiento*. Las investigaciones vinculadas al uso del conocimiento abordan fundamentalmente “el uso de las gráficas” (Cordero, 2006; Cordero y Flores, 2007; Cordero, Cen y Suárez, 2010; Buendía, 2006; Buendía, 2012; etc.), a partir de los aportes de estas investigaciones es posible determinar qué elementos se deben tomar en consideración para identificar usos del conocimiento en general e identificar resignificaciones de saberes que resultan de estos usos.

El interés de este trabajo está centrado en identificar cómo es usado cierto conocimiento en una situación determinada. En particular interesa identificar usos del número real en la obra matemática de Descartes.

Uno de los intereses principales de analizar la obra matemática cartesiana responde al hecho de que son pocas las investigaciones que han analizado en profundidad los aportes matemáticos de Descartes. Se considera de importancia relevante analizar e identificar el uso de los números en la obra de este filósofo-matemático, puesto que es el primero que intenta vincular la estructura aritmética de los números y llevarla al contexto geométrico. ¿Cómo lo logra? ¿Por qué?

El momento histórico seleccionado y la unidad de análisis diseñada se nutren de diversas investigaciones que abordan el análisis histórico-epistemológico del número real (Bergé y Sessa, 2003; Bergé, 2006; Mora y Torres, 2004, Romero, 1995, Sánchez y Valdivé, 2012) y de investigaciones que abordan el análisis del uso del conocimiento, en particular el uso de las gráficas (Cordero, 2006; Cordero y Flores, 2007; Cordero, Cen y Suárez, 2010; Buendía, 2006; Buendía, 2012).

Se han identificado tres usos del número en la obra de Descartes que se han denominado: el *uso geométrico-aritmético*, el *uso geométrico-algebraico* y el *uso geométrico-analítico*. De cada uno de estos usos se ha dado evidencia de las siguientes resignificaciones: la resignificación de número real positivo, la resignificación de operaciones aritméticas, la resignificación de ecuación algebraica, la resignificación de solución positiva de una ecuación, la resignificación de problemas geométricos.

La investigación brinda una posible respuesta al cómo y el por qué Descartes realiza este tránsito entre los contextos aritmético, algebraico y analítico vinculado a los números reales.

Este análisis de usos y resignificaciones del número busca mostrar que es posible abordar de una nueva forma el estudio didáctico del número y proveer de insumos a futuras investigaciones que aborden el diseño de actividades didácticas donde el *uso del número* se ponga en juego.

Referencias bibliográficas

Bergé, A. y Sessa, C. (2003). Completitud y continuidad revisadas a través de 23 siglos. Aportes para una investigación didáctica. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, *6*(3), 163-197.

Buendía, G. (2012). El uso de las gráficas. Un estudio con profesores. *Educación Matemática, 24*(2), 5-31.

Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 10*(1), 7-38.

Descartes, R. (1886). La Géométrie. París: Editor A. Hermann.

Fregueiro, A. (2014). *Usos y resignificación del número real en la obra matemática de René Descartes.* Tesis de maestría no publicada. CICATA-IPN. México.

González Urbaneja, P. (2004). *La Geometría de Descartes. Los orígenes de la geometría analítica.* Canarias: Fundación Canaria Orotava de Historia de la Ciencia.

Hernández, V. (2002). La geometría de Descartes. *Apuntes de Historia de las Matemáticas*, *1*(1), pág. 32-45.

Mora, L. y Torres, J. (2004). *Concepciones de estudiantes de licenciatura en matemáticas sobre números reales* (Tesis de maestría no publicada). Universidad Pedagógica Nacional. Colombia.

Romero, I (1995). *La introducción del número real en Educación Secundaria* (Tesis de doctorado no publicada). Universidad de Granada. España.

Sánchez, J. y Valdivé, C. (2012). El número irracional: una visión histórico-didáctica. *Premisa*, 52, 3-17.

Una Mirada Sobre Las Relaciones Entre La Teoría Antropológica De Lo Didáctico Y El Enfoque Instrumental

Mario A. Di Blasi Regner

Resumen

En esta conferencia reflexionaré sobre algunas relaciones que pueden establecerse entre la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1999) y el Enfoque Instrumental (Artigue, 2002). Esta reflexión busca ser un aporte para comprender las transformaciones que se producen cuando se introducen, como mediadoras, las TIC en las clases de Matemática.

La integración de ambos enfoques teóricos permite una justa valoración de las funciones epistémicas de las TIC en la Educación Matemática y una nueva visión sobre el valor pragmático y epistémico de las técnicas.

Comparto con otros investigadores (Mejía Palomino, 2014; Olive y Makar, 2010) la idea que los conceptos de técnica instrumentada, entendida como una secuencia relativamente estable de interacciones entre el usuario y el artefacto con un propósito particular, y de esquema de utilización (Rabardel, 2011) son los que permiten relacionar con mayor claridad el Enfoque Instrumental y la Teoría Antropológica de la Didáctico. Ambos conceptos son valiosas herramientas para el análisis de las actividades matemáticas para las que un artefacto, devenido en instrumento, es un medio de realización de las mismas.

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and dialectics between technical and conceptual work. International Journal of computer for Mathematical Learning, 7, pp. 245- 274.

Chevallard Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 19, nº 2, pp. 221-266. Traducción de Ricardo Barroso Campos. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Sevilla.

Recuperado el 01/09/2015 de http://www.aloj.us.es/rbarroso/Pruebas/CHEVALLARD.PDF.

Mejía Palomino, M. (2014). La técnica instrumentada, vínculo entre la Teoría Antropológica de lo Didáctico y la Génesis Instrumental, Memorias del XII COLOQUIO REGIONAL DE MATEMÁTICAS y II SIMPOSIO DE ESTADÍSTICA, Recuperado el 01/09/2015 de http://dematyes.udenar.edu.co/coloquio/?page_id=126.

Olive, J., y Makar, K. (2010). Mathematical Knowledge and Practices Resulting from Access to Digital Technologies. En C. Hoyles y J-B. Lagrange (Eds.), Mathematics education and technology-Rethinking the terrain. The 17th ICMI Study (pp. 133-177). New York: Springer.

Rabardel, P. (2011). Los hombres y las tecnologías. Visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos (Trad. M. Acosta). Colombia: Ediciones Universidad Industrial de Santander. (Trabajo original publicado en 1995).

Estudio De La Actividad Académica De Profesores De Matemáticas A Partir De La Perspectiva De Comunidades De Práctica

Isaias Miranda Viramontes
CICATA-IPN

Resumen

En el reporte de Adler et al. (2005), en el que se hace una revisión exhaustiva sobre los estudios publicados en el tema de la enseñanza de las matemáticas a finales del siglo pasado e inicios de este, se asegura que, al colocar al profesor en el centro de la investigación, aumenta la complejidad de estudiar la enseñanza (esta complejidad se manifiesta en la diversidad de significados del término "estudio de la enseñanza" en distintas aproximaciones teóricas desarrolladas en educación matemática; ver Rogalski, 2003). Este aumento puede deberse a la variedad de interacciones que suceden no solo dentro del aula (e.g. las interacciones profesor-estudiante y profesor-estudiantes) sino fuera de ella (e.g. las interacciones profesor-profesor). En esta ponencia exploro la naturaleza de esta última interacción en el contexto de reuniones de academia (actividad académica) sostenidas por dos profesores universitarios que enseñan probabilidad. Con base en la Teoría de Comunidades de Práctica (TCoP) (Wenger, 2001) y, más específicamente, en el concepto de negociación de significado, esta actividad académica es estudiada en términos de las decisiones tomadas por los profesores para evaluar el aprendizaje de sus estudiantes. Muestro cómo estas decisiones influyen en el desempeño de los profesores dentro del aula. Durante la exposición, doy por sentado que las tres dimensiones (mencionadas por Wenger) para conformar una comunidad de práctica (repertorio compartido, compromiso mutuo y empresa conjunta) pueden ser observadas en la comunidad de los dos profesores participantes. Termino con la propuesta de una posible aplicación de la TCoP para el análisis de la enseñanza de las matemáticas.

Referencias

Adler, J., Ball, D., Krainer, K., Lin, F.L. & Novotna, J. (2005). Reflections on an emerging field: researching mathematics teacher education. *Educational Studies in Mathematics*, *60*, 359-381.

Rogalski, J. (2003). Y-a-t-il un pilot dans la classe? Une analyze de l'activite de l'enseignant comme gestion d'un environment dynamique overt. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, *23*(3), 343-388.

Wenger, E. (2001). *Comunidades de práctica: aprendizaje, significado e identidad*. (Trad. G. Sánchez Barberán). España: Paidós.

Comprensión De Estudiantes Normalistas De Matemáticas Sobre Ideas Fundamentales De Estocásticos Mediante La Webquest Como Estrategia De Enseñanza

Saúl Elizarrarás Baena
Escuela Normal Superior de México

Resumen

En el presente reporte de investigación de tipo cualitativo (Eisner, 1998; Martínez, 2004), se interpreta y analiza la comprensión de estudiantes normalistas de Matemáticas sobre juegos de azar e ideas fundamentales de estocásticos (Heitele, 1975) y sus argumentos son relacionados con la etapa de subjetividad correspondiente (Frawley, 1999), mediante la WebQuest (WQ) como estrategia para el desarrollo de su pensamiento estocástico, previo a la enseñanza. Los resultados muestran que la comprensión de ideas fundamentales de estocásticos fue muy limitada, pues carecieron de argumentos sólidos que pudieran establecer la relación entre el objeto, el signo y el concepto (Steinbring, 2005).
Palabras clave: comprensión, estocásticos, estrategia, enseñanza, formación docente.

1. Planteamiento del problema

El término estocásticos refiere a la conjugación de la probabilidad y estadística, de manera que se interrelacionen e incluso, estableciendo conexiones con otros temas de las diferentes ramas de las Matemáticas, pues los temas de estocásticos permiten una amplia gama de aplicaciones en otras disciplinas científicas afines.

De forma más o menos regular, los estudiantes normalistas de Matemáticas tienen dificultades para comprender ideas fundamentales de estocásticos, lo cual promete difícil que en el futuro inmediato y mediato, puedan cristalizar su propia actividad profesional con los alumnos de la escuela secundaria para la asignatura de las Matemáticas. De este modo se pretende identificar sus dificultades de comprensión sobre ideas fundamentales de estocásticos mediante el uso de la WQ como estrategia de enseñanza.

2. Referentes teóricos y conceptuales

En general, la investigación se compone de los aspectos siguientes: epistemológico (Heitele, 1975), cognitivo (Fischbein, 1975; Frawley, 1999) y social (Steinbring, 2005). Asimismo, se considera la perspectiva sobre la resolución de problemas y el desarrollo de competencias sociocognitivas en entornos virtuales (Monereo, 2005), tal es el caso de la WebQuest como estrategia para la enseñanza y el aprendizaje (Adell, 1999).

2.1. Ideas fundamentales de estocásticos

Desde una perspectiva epistemológica, Heitele (1975) enfatiza que para estocásticos es más urgente que en otras ramas de las Matemáticas, una lista de ideas fundamentales, por lo que propone las siguientes: medida de probabilidad, espacio muestra, regla de la adición, regla del producto e independencia, equidistribución y simetría, combinatoria, modelo de urna y simulación, variable estocástica, ley de los grandes números y muestra. El autor señala que estás ideas deben ser incorporadas en la currícula escolar de todos los niveles educativos para que sean enseñadas de forma gradual y sistemática desde el nivel preescolar hasta el superior; estas ideas sin un carácter estructuralista, deben proporcionar en el individuo modelos explicativos en cada etapa de su desarrollo, tan eficientes como sea posible y que conforme a los distintos niveles cognoscitivos se deben distinguir por su forma lingüística y por sus niveles de elaboración.

Un aspecto trascendental en la comprensión de las ideas fundamentales de estocásticos son las intuiciones, definidas por Fischbein (1975) como adquisiciones cognitivas que intervienen directamente en las acciones prácticas o mentales, con características globales, inmediatas, estructurales, extrapolatorias y autoevidentes; el autor las clasifica en primarias (experiencia del individuo, correctas, o incorrectas como sesgos) y secundarias (resultantes de la educación).

Derivado de lo anterior, Frawley (1999) unifica a internalistas y externalistas al considerar al ser humano como máquina y como persona, pues afirma que nada es completamente social ni totalmente individualista; por lo que caracteriza *tres tipos de subjetividad*: el procesamiento no consciente que refleja la experiencia personal, la conciencia que utiliza de forma simple modelos simbólicos para interpretar e informar cualidades de la experiencia) y la metaconciencia que refiere a la toma de conciencia del yo y la organización deliberada de la experiencia.

Por su parte, Steinbring (2005) señala que las intuiciones probabilísticas se desarrollan de forma gradual y lenta, condicionados por los acontecimientos que se dan en el aula al interactuar los alumnos con el profesor; de este modo, destaca la importancia de que haya una selección de situaciones convenientes que privilegien la comprensión de estocásticos vía el enfoque frecuencial. El autor propone un triángulo epistemológico compuesto de tres elementos: concepto, objeto y signo; en este sentido, pone de relevancia la naturaleza de la comprensión de un concepto y establece que es imposible deducir el significado de uno de los vértices sin considerar los otros dos.

2.2. Definición y estructura de una WebQuest

Desde una perspectiva particular, estructuralmente una WebQuest (WQ) es una serie de pasos que deben llevarse a cabo para satisfacer los propósitos de la planificación de la enseñanza de una temática en particular (ver Figura 1).

Figura 1. Elementos que componen la estructura de una WQ.

En la parte central de una WQ, se debe reconocer que son un conjunto actividades de aprendizaje que permiten a los estudiantes interactuar social y cognitivamente en el marco de elaboración de proyectos colaborativos que estratégica y potencialmente, posibilitan el desarrollo del pensamiento crítico y reflexivo mediante el despliegue pertinente de las habilidades digitales sobre el uso educativo de las Tecnologías de la Información y Comunicación.

Adell (2004) señala que en una WQ la planificación del docente debe plasmar de forma explícita el trabajo colaborativo de los estudiantes, quienes durante el proceso realizarán una amplia gama de actividades como leer, comprender y sintetizar información seleccionada de Internet o de otras fuentes, organizar la información recopilada, elaborar hipótesis, valorar y enjuiciar ideas y conceptos, producir textos, dibujos, presentaciones multimedia, etc. El autor enfatiza que se deben proponer diversos recursos accesibles a través de Internet y, de ser necesario, se proporcionará una serie de ayudas o andamios de recepción, transformación y producción de información que les ayudarán a asimilar y acomodar la nueva información y a elaborar el producto final.

2.3. Desarrollo de competencias sociocognitivas y pensamiento crítico

Monereo (2005) enfoca el concepto de competencia como competir, este se asimila a ser "adecuado o apto" para una determinada actividad, es decir, ser competitivo. Para el autor, alguien competente es una persona que sabe leer con gran exactitud qué tipo de problema es el que se le plantea y cuáles son las estrategias que deberá activar para resolverlo. Asimismo, plantea que mediante la WQ se pueden desarrollar las competencias sociocognitivas básicas que él propone de forma interrelacionada (ver Figura 2), poniendo especial atención no sólo en el resultado sino también en el proceso; de este modo, el estudiante debe desempeñar un papel activo y sobre todo en el caso del aprendizaje de las Matemáticas, pues al resolver problemas se favorece el razonamiento lógico, la flexibilidad y la reversibilidad del pensamiento; cuyas importancia y trascendencia se deben ver reflejadas en una perspectiva y prospectiva crítica de la realidad de un mundo tan cambiante en el que día a día se vive y se convive, por lo que se necesita una base científica, racional y sobre todo ética.

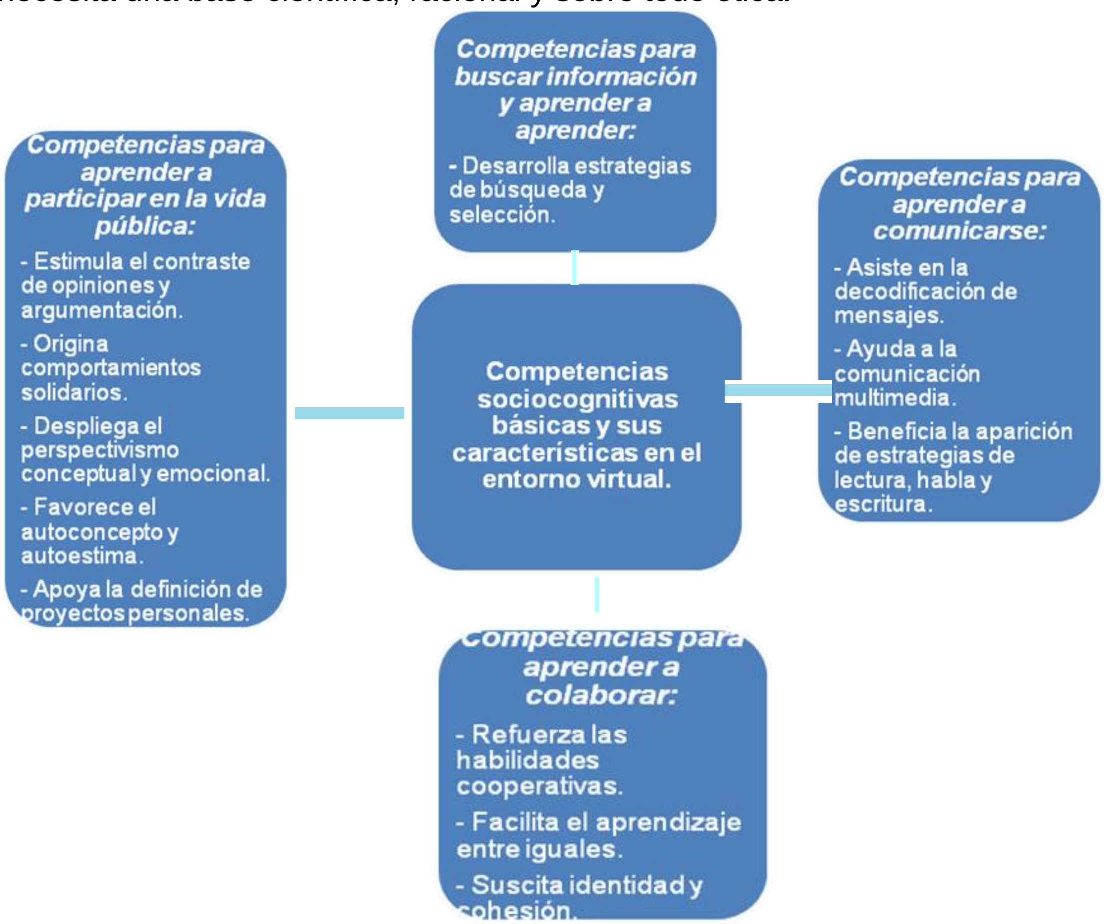


Figura 2. Competencias sociocognitivas y sus características en el entorno virtual.

El pensamiento crítico es aquel que tiene como punto de partida la reflexión, lo cual desencadena en el planteamiento de alternativas para la toma de decisiones; Campos (2007) lo define como un proceso mental disciplinado que hace uso de estrategias y formas de razonamiento que usa la persona para evaluar argumentos o proposiciones, tomar decisiones y aprender nuevos conceptos. De este modo, se hace imprescindible destacar la importancia de la interrogación en la autorregulación como un proceso de pensamiento que implica ser consciente para planear, identificar y evaluar. La interrogación permite precisar el logro de las metas en función de utilizar los recursos y cambios necesarios. La autorregulación depende de la interrogación en el sentido de que las preguntas que se puedan plantear para el estudiante, le permitirán la especificación de hacia dónde se debe dirigir para el logro de los propósitos de su propio aprendizaje; asimismo, le permiten orientar de manera clara y ordenada los recursos cognitivos que debe movilizar para el desarrollo de las competencias.

A modo de ejemplo, el tema de nociones de probabilidad y en particular, la comprensión de la idea de azar podría ser iniciada a partir de la formulación de las preguntas siguientes: ¿Qué conozco sobre el azar y la probabilidad? ¿Cómo puedo relacionar esta información con la resolución de los problemas planteados? ¿Qué conclusiones puedo formular entre lo que sabía y lo que debo aprender?

Referente al proceso, podría plantearse las preguntas siguientes: ¿Qué pasos debo seguir para resolver cada uno de los problemas? ¿Cuánto comprendí de los datos contenidos en el problema? ¿Qué estrategias utilice para resolverlo? ¿Qué dificultades me han surgido? ¿Cómo puedo superarlas?

Derivado de lo anterior, es necesario concientizar a los estudiantes de sus errores y sobre todo trabajar en estos a partir de las preguntas siguientes: ¿En cuáles procedimientos matemáticos te equivocaste? ¿Cómo debiste haber procedido para resolver correctamente el problema? ¿Podrías utilizar las ideas fundamentales de estocásticos para resolver los problemas planteados?

3. Enfoque metodológico y organización de la investigación

La metodología es de tipo cualitativa bajo la perspectiva de Eisner (1998) y Martínez (2004), el enfoque metodológico es la etnografía educativa, el método utilizado es el de observación participante; se utilizó como técnica de registro de la información a la bitácora a modo de diario de campo. Los referentes teóricos devinieron en criterios de análisis y, en otros casos, dadas las características de las respuestas proporcionadas por los participantes de este estudio, se propusieron algunas categorías de interpretación.

En su fase inicial, este estudio se llevó a cabo en una de las aulas de la ENSM del Turno Vespertino, con un grupo de doce estudiantes normalistas que cursaban el sexto semestre de la Licenciatura en Educación Secundaria de la Especialidad en Matemáticas, conforme al Programa de Estudio vigente (SEP, 1999). Cabe destacar que aun cuando se contaba con autorización por parte de las autoridades educativas de la ENSM citadas anteriormente, el acceso al aula fue mediado por el investigador quien también fungía como docente.

4. Interpretación y análisis de resultados

Se consideró la célula de análisis (Ojeda, 2006): *ideas fundamentales de estocásticos*, *otros conceptos matemáticos*, *recursos semióticos de la información*, *términos utilizados*, *situaciones y contextos planteados.*

Con base en lo anterior, en la Tabla 1, se presenta el análisis previo al que fue sometido la WQ denominada La Lotería y El Azar propuesta por Delgadillo (2008), la cual fue realizada por los (las) participantes de forma autónoma y sin enseñanza previa.

Tabla 1. Análisis previo de la WebQuest sobre juegos de azar.

Situaciones y contextos planteados	Otros conceptos matemáticos	Términos utilizados	Registros semióticos	Ideas fundamentales
• Quinielas deportivas	• Operaciones básicas con números	Probar suerte, premio, azar,	• Lengua natural	• Medida de probabilidad

. • Lotería • Zodiaco • Melate	enteros: adición, sustracción, multiplicación y división. • Cálculo de porcentaje. • Fracciones.	probabilidad, oportunidades, combinaciones, repartos, acertar, combinaciones, posibles, ventajas, elecciones, esperanza matemática	• Figuras o imágenes	• Espacio muestra • Regla de la adición • Independencia Regla del producto • Equidistribución y simetría • Combinatoria • Modelo de urna y simulación • Variable aleatoria • Ley de los grandes números • Muestra

En la Figura 3, se presenta la introducción propuesta para la WQ denominada La lotería y el Azar. A modo de que los alumnos, se interesen y generen reflexiones previas, se propone información relacionada con el excesivo gasto promedio anual de los españoles en los juegos de azar; se continúa con preguntas orientadoras que pudieran permitir a los estudiantes centrar su atención en aspectos nodales.

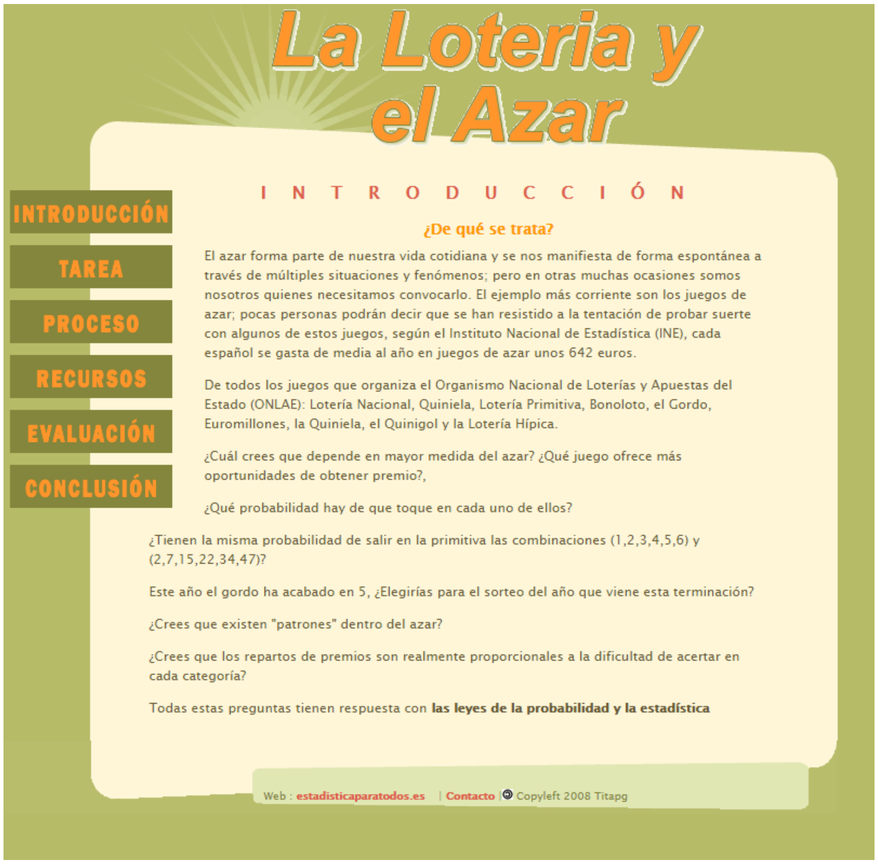


Figura 3. Introducción propuesta en la WQ (La Lotería y el Azar).

La tarea central consiste en que los alumnos desarrollaran una serie de preguntas y/o temas para un informe, los cuales a continuación se citan y de forma inmediata, se ejemplifican algunas de las respuestas proporcionadas por los participantes:

La influencia del azar, ¿hay jugadores con más ventajas que otros?

Para esta pregunta, hubo una estudiante (E_1) que pudo identificar ideas fundamentales de estocásticos tales como: medida de probabilidad, espacio muestra y regla de la adición; por lo que se puede ubicar en la segunda etapa que propone Frawley (1999) denominada la conciencia.

> Esto depende del número de boletos que cada persona compre, es decir si una persona compra un solo boleto tendrá una probabilidad de $\frac{1}{120000}$

> mientras que otra persona que compre cinco boletos tendrá una posibilidad de $\frac{5}{120000}$.

Otra respuesta justificada de modo parcial, bajo el supuesto de que todos los participantes compren un solo boleto es la proporcionada por otra participante (E_6) y de este modo, sólo relacionó de modo informal la idea de equidistribución y simetría, por lo que se le puede ubicar en la frontera entre el procesamiento no consciente y la conciencia.

> No, puesto que todos tienen la misma probabilidad de ganar ya que al comprar un boleto se convierte en una parte de un todo.

Un aspecto del que también hubo respuestas interesantes por parte de los estudiantes normalistas fue el siguiente:

El análisis matemático del juego en sí (relativo a los posibles resultados, probabilidades de acertar los distintos premios, etc.)

A este respecto, una estudiante (E_1) estableció la relación que hay entre los premios y el número de boletos comprados, con lo cual tuvo un acercamiento a la comprensión de las ideas siguientes: muestra y ley de los grandes números; derivado de lo anterior, se le puede ubicar en la frontera entre el procesamiento no consciente y la conciencia.

> Las probabilidades aumentaran según el número de premios que se otorguen y el número de boletos que se adquieran.

Para tomar como punto de reflexión, un aspecto que se incorporó refirió a las intuiciones y/o creencias de los participantes

La actuación de los propios jugadores, ¿sus elecciones pueden tener influencia en el juego en sí?

En este sentido, se presentaron algunas de las respuestas esperadas en las cuales descartaron ideas fundamentales de estocásticos tales como: regla del producto e independencia y modelo de urna y simulación (E_5). Así, se les pudo ubicar en el procesamiento no consciente.

> La gente juega con mayor o menor frecuencia, considerando que pueden dividirse en dos tipos: los «números favoritos» y los «números no-favoritos». Por tanto cualquier jugador que analice esos datos puede aprovecharlos en su favor.

Asimismo, se les pidió que pudieran utilizar la esperanza matemática para comprender que la probabilidad de ganar un premio es mínima y demás reflexiones que se derivan en este sentido (ver figura 4).

Esperanza matemática del juego, es decir, la relación entre el premio obtenido y la probabilidad de acertar.

Las respuestas proporcionada no fueron las esperadas, por lo que se descartó la comprensión de ideas fundamentales de estocásticos tales como: muestra y ley de los grandes números (E_1); por lo que al ejemplo de respuesta, se les ubicó en la frontera entre el procesamiento no consciente y la conciencia.

$$\frac{1}{120000} \times 6{,}000{,}000 = \frac{6{,}000{,}000}{120000} = 50$$

> Cabe mencionar que en esta parte como tal no entendí el concepto de esperanza matemática según la definición de la webquest ya que no me da un valor entre el intervalo [0,2], según la esperanza matemática se maneja entre ese rango.

De forma complementaria a la interpretación y análisis anterior, se puede considerar que el desarrollo del trabajo colaborativo y autónomo no se desarrolló de manera esperada y en consecuencia, tampoco las competencias sociocognitivas. Cabe señalar que los estudiantes normalistas no estaban lo suficientemente familiarizados con el uso de la WQ como estrategia de enseñanza para lograr los aprendizajes esperados.

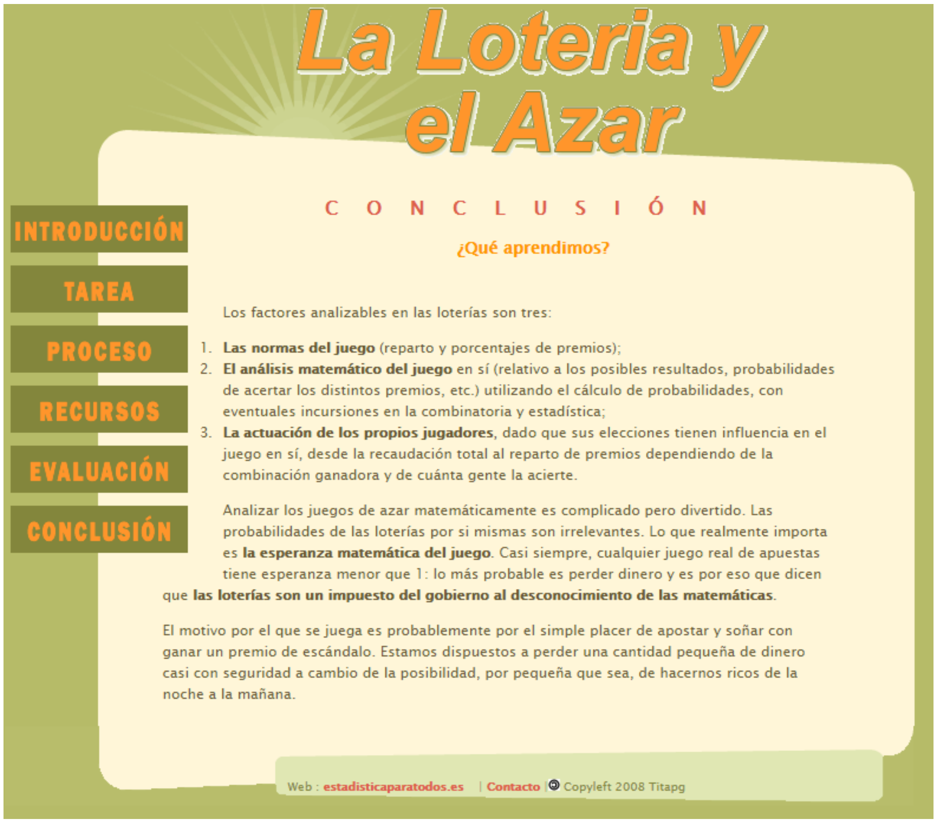


Figura 4. Conclusión de la WQ

5. A modo de conclusiones

En general los participantes manifestaron dificultades de comprensión con ideas fundamentales de estocásticos: medida de la probabilidad, espacio muestra y regla de la adición; aunque también hubo dos o tres casos que dieron muestras de un dominio suficiente pero no deseado o esperado.

En el corto plazo, con esta WQ se familiarizo a los participantes con el uso de esta estrategia de enseñanza; en el mediano plazo, se pudieron desarrollar nociones sobre ideas de probabilidad y azar. Con esta WQ los estudiantes normalistas movilizaron algunos conocimientos previos, por lo que desarrollaron el aprendizaje autónomo y respecto al trabajo colaborativo, fue un aspecto que descartado por la mayoría de los participantes, pues a pesar de que se les indicó que debían conformar equipos de tres personas, los trabajos fueron enviados vía correo electrónico en forma individual y sólo uno de estos fue realizado por dos personas.

Es imprescindible que los estudiantes normalistas puedan familiarizarse con el uso de las WQ no sólo para comprender ideas fundamentales de estocásticos sino también para que puedan desarrollar competencias sociocognitivas relacionadas con el trabajo colaborativo y autónomo y a su vez, podrán movilizar el pensamiento pedagógico que les permita diseñar estrategias de enseñanza con el uso de las TIC y sobre todo que las puedan aplicar con los estudiantes de secundaria de modo más o menos exitoso.

Finalmente, es necesario continuar desarrollando proyectos de investigación relacionados con el uso de las Tecnologías de la Información para reflexionar y analizar la comprensión y la enseñanza de estocásticos en la formación docente inicial de futuros profesores de Matemáticas para la educación básica y en particular, el nivel secundaria; sobre todo resulta importante acceder al aula con egresados de la Escuela Normal Superior de México con la finalidad de dar seguimiento a su desempeño e impacto en los aprendizajes esperados propios de temas relacionados con la probabilidad y la estadística.

Referencias

Adell, J. (2004). Internet en el aula: las WebQuest. *Revista electrónica de tecnología educativa*, Volume 17, Issue 04

Campos, A. (2007). *Pensamiento crítico. Técnicas para su desarrollo*. Colombia: Cooperativa Editorial Magisterio.

Delgadillo, J. A. (2008). WebQuest: La Lotería y el Azar. Recuperado el 31 de enero de 2015 de la url: http://www.estadisticaparatodos.es/webquest/loterias/

Eisner, E. (1998). *El ojo ilustrado*. *Indagación cualitativa y mejora de la práctica educativa.* España: Paidós.

Fischebein, E. (1975). *The intuitive Sources of Probabilistic Thinking*. Holanda: Reidel.

Frawley, W. (1999). *Vygotsky y la ciencia cognitiva*. España: Paidos.

Heitele, D. (1975). *An epistemological View on Fundamental Sthocastic Ideas*. Educational Studies in Mathematics, 6, pp. 187-205. Holanda: Reidel.

Martínez, M. (2004). *El paradigma emergente: hacia una nueva racionalidad científica.* México: Trillas.

Monereo, C. (2005). Internet un espacio idóneo para desarrollar las competencias básicas. *En Monereo et al, Internet y competencias básicas. Aprender a colaborar, a comunicarse, a participar, a aprender* (pp. 5-25). México: Graó.

Ojeda, A. M. (2006). Estrategia para un perfil nuevo de docencia: un ensayo en la enseñanza de estocásticos. *Matemática Educativa, treinta años: una mirada fugaz, una mirada externa y comprensiva, una mirada actual. (Filloy, E., ed.).* Santillana; Cinvestav del IPN. México, págs. 195-214.

SEP (1999). *Programas de Estudio. Licenciatura en Educación Secundaria. Matemáticas,* México: SEP.

Steinbring, H. (2005). *The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction. An Epistemological Perspective*. Springer, USA: NCTM.

Profesores-Investigadores. Una Propuesta De Formación Desde La Matemática Educativa

Alma Rosa Pérez Trujillo, Ángel Gabriel López Arens, Cristóbal Cruz Ruiz
Universidad Autónoma de Chiapas

Resumen

En esta ponencia se presentan los resultados del trabajo realizado a lo largo de casi cuatro generaciones en el Seminario de Investigación en Matemática Educativa II y III de la Maestría en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa de la Universidad Autónoma de Chiapas; este programa fue creado en el año 2000 y puesto en marcha en el año 2001 y de él se han graduado un total de catorce generaciones. Sin embargo, no se ha logrado que muchos de los estudiantes finalicen sus estudios y en la caso de los egresados, logren obtener el grado, por ello, con miras a incrementar la eficiencia terminal del programa y el índice de graduación del mismo, se ha implementado desde el 2012 una forma de trabajo más estructurado con relación al trabajo de investigación que cada uno de los estudiantes viene realizando. De esta manera presentamos un resumen de la metodología de trabajo que hemos empleado, la cual ha rendido algunos frutos, dentro de los que se encuentran el aumento en la eficiencia terminal y la integración del borrador de la tesis de casi todos los estudiantes al egresar de la maestría. Si bien aún queda mucho camino por recorrer y ajustes que realizar, los resultados de la experiencia que se ha vivido, son alentadores y en consecuencia, señala que vamos por el camino adecuado.

Palabras clave: Formación de Profesores-Investigadores, Matemática Educativa.

Introducción

El programa de la Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa (PMCEME) fue creado en septiembre del año 2000, y se puso en marcha en enero de 2001, al día de hoy cuenta con 13 generaciones de egresados, el plan de estudios del PMCEME está organizado en dos fases:

formación básica y desarrollo de la investigación, ambas fases atienden al objetivo del programa.

El objetivo del programa es formar investigadores y/o profesores en Matemática Educativa que, constituidos en una base sólida, sustenten la conformación de grupos de investigación en las diferentes regiones del estado de Chiapas y propicien una dinámica de formación sistémica de profesores de nivel medio superior y superior, matizada por la búsqueda de una compatibilidad entre el sistema de enseñanza y el entorno social (UNACH, 2000, p. 2).

A lo largo de todas las generaciones del programa se han vivido dos problemáticas, por un lado está la eficiencia terminal y por el otro la tasa de graduación. Si bien la eficiencia termina no es tan grave, no sucede lo mismo con la tasa de graduación de las distintas generaciones, la cual es muy pobre y es uno de los indicadores para que este programa no pueda registrarse en el Padrón de Programas de Calidad del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología de México. Debido a ello, en ocasiones se ha pensado en que un remedio para este mal es la implementación de diplomados de titulación, hasta ahora, la idea no ha progresado, toda vez que las propuestas que han surgido no son atractivas para los egresados, muchos de los cuales tienen ya más de diez años de haber terminado sus estudios. Se pensó entonces en una estrategia que permitiera trabajar con los estudiantes que aún teníamos en el programa; se propuso una forma de trabajo que involucra a los profesores y alumnos de las dos generaciones que se atienden de manera simultánea en cada semestre, para poder encausar los trabajos de investigación que cada estudiante viene realizando. De acuerdo al objetivo del PMCEME, la idea de formación de los estudiantes quienes en su mayoría son profesores en servicio, se encuentra sustentada en: el modelo de las adquisiciones académicas.

El modelo establece que la formación consiste en convertir al profesor en un intelectual que domina las disciplinas científicas con la finalidad de impartirlas. Entonces, el profesor genera prácticas en las que se aplique la teoría disciplinar y su propia didáctica para trasmitirla. En este sentido, la formación consiste en adquirir el saber, la técnica, las actitudes, el comportamiento, con la finalidad de saber trasmitirlos (Ferry, 1990 citado en Loya, 2008, p. 2).

El modelo orienta a los formantes en el cuestionamiento de teorías y prácticas consideradas alienantes y represivas para la sociedad dominada, con el fin de promover respuestas liberadoras que transformen las situaciones de vida.

El profesor se considera un profesional autónomo que reflexiona sobre su práctica cotidiana para comprender las características de los procesos de enseñanza-aprendizaje en un contexto político escolar y actuar críticamente (Loya, 2008, pp.4-5).

Ambos modelos son implementados en las dos fases en las que está organizado el PMCEME. De igual manera se observan las fases en las materias que se imparten a lo largo de los cuatro semestres de la maestría y que detallamos en los siguientes apartados.

El plan de estudios de la Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa

De acuerdo al plan de estudios del PMCEME (UNACH, 2000) una de las características más importantes de este programa es la incorporación de los estudiantes a sus proyectos de investigación a partir del segundo semestre, esto se hace de manera particular en el Seminario de Investigación en Matemática Educativa I (SIME-I).

En cuanto a las fases en las que se ha dividido el programa, Formación básica y Desarrollo de la investigación:

Formación básica: En el transcurso de esta fase se proporcionan los elementos básicos del campo de estudio, sus modelos teóricos, métodos y técnicas, así como los alcances actuales, tanto en el ámbito nacional como internacional de la investigación en el área de la Matemática Educativa. También se construye una mayor precisión sobre la naturaleza del pensamiento matemático.

Desarrollo de la investigación: Durante este período, las actividades están dirigidas al diseño y desarrollo de la investigación de un problema y están en estrecha relación con las líneas y proyectos de investigación que desarrollan los investigadores adscritos al programa (UNACH, p. 13).

En estas fases podemos ubicar las materias que se cursan a lo largo del programa, para ello hemos elaborado la tabla 1:

Tabla 1. Ubicación de las materias del PMCEME de acuerdo a las fases propuestas.

Fase	Semestre	Materia
Formación básica	Primero	Estudio de los Contenidos de la Matemática Escolar I
		Herramientas Tecnológicas en Matemática Educativa
		Teoría y Metodología de la Matemática Educativa I
		Temas Selectos de Matemáticas
	Segundo	Estudio de los Contenidos de la Matemática Escolar II
		Optativa 1
	Tercero	Estudio de los Contenidos de la Matemática Escolar III
		Optativa 2
Desarrollo de la investigación	Segundo	Teoría y Metodología de la Matemática Educativa II
		Seminario de Investigación en Matemática Educativa I
		Laboratorio de Didáctica de las Matemáticas I
	Tercero	Seminario de Investigación en Matemática Educativa II
		Laboratorio de Didáctica de las Matemáticas I
	Cuarto	Seminario de Investigación en Matemática Educativa III
		Laboratorio de Didáctica de las Matemáticas III

Fuente: Elaboración propia con base en UNACH, 2000, pp. 15-16.

Como se puede observar en la tabla 1, en el primer semestre se centra la formación básica y se continúa en algunas materias de los dos semestres posteriores, en cuanto al desarrollo de la investigación, comienza en el segundo semestre y a lo largo de los dos semestres siguientes se continúa con este trabajo.

De acuerdo a la experiencia, es en el tercer semestre donde los estudiantes definen cabalmente la investigación que van a realizar, esto implica que al finalizar el tercer semestre deben tener su protocolo de investigación, el cual se ha venido trabajando a lo largo del semestre principalmente en el Seminario de Investigación en Matemática Educativa II (SIME-II). En el cuarto semestre se dedican al desarrollo de la investigación y como producto se debe tener el borrador de la tesis. Para lograr ambas metas, se ha elaborado un plan de trabajo con una metodología específica, el cual presentamos enseguida.

Propuesta de formación de profesores-investigadores desde la matemática educativa

Formar a investigadores en el campo de la Matemática Educativa, tiene ciertas implicaciones, primero, reconocer que nuestro campo cuenta con diversos marcos teóricos y metodologías propios, sin embargo, éstos no son excluyentes, ya que se reconoce a la disciplina de la Matemática Educativa como multidisciplinar, toda vez que echa mano de varias de ellas y Godino (2002) resume esta relación en las preguntas básicas que se plantean en nuestro campo de estudio: qué enseñar (Matemáticas), por qué (filosofía), a quién y dónde (sociología) y cuándo y cómo (psicología).

En segundo término, las propuestas de investigación están cargadas de la experiencia y conocimiento del ámbito de la profesión de quien realiza la investigación, en nuestro caso profesores de matemáticas. Por último, la experiencia de los profesores-investigadores que realizan el papel de directores de tesis.

Considerando estas componentes, hemos diseñado una estrategia que nos permite mantener involucrados a los estudiantes y directores de tesis, en una dinámica de trabajo que permite la configuración y escritura del borrador final de la tesis, enseguida mostramos la metodología utilizada.

Metodología

En la metodología utilizada hemos establecido cuatro etapas, las cuales se llevan a cabo en el tercer y cuarto semestre del PMCEME:

La primera, delimitar los interés de los estudiantes en cuanto a la investigación y profesor con quien desean trabajarla. Esto se realiza mediante una entrevista no estructurada y en colectivo, en ella participan todos los estudiantes y el profesor a cargo del SIME-I. Este trabajo se complementa con el llenado de un formato en el cual deben escribir sobre el tema que les gustaría investigar y en caso de tener varios temas, se pide que los coloquen por orden de prioridad. Se les pide además que coloquen el nombre de los profesores con los cuales cree que sería factible la realización de su trabajo de investigación y que explica los motivos académicos para tomar esta decisión, este formato es revisado por todos los profesores en una reunión colegiada, con la finalidad de que conozcan los interés de los estudiantes y se vayan perfilando posibles direcciones de tesis.

La segunda etapa, involucrar a los profesores del núcleo académico del PMCEME para que expongan su tesis de grado, con la intensión de que los alumnos conozcan las investigaciones que han llevado a cabo los profesores y además, cuál o cuáles son las líneas de investigación que actualmente cultivan los profesores, así mismo, en estas exposiciones los profesores se centran en presentar y argumentar desde su investigación, sobre las siguientes interrogantes:

a) Qué teoría y metodología emplearon en su investigación.

b) Porqué utilizar esa teoría y metodología.

c) Existe o conocen alguna otra teoría y metodología que se hubieran podido utilizar.

d) Cómo se pueden ver los elementos de la teoría y el proceso metodológico en los resultados de su investigación.

Podría decirse que las etapas uno y dos concluyen una vez que se ha definido a los directores de tesis.

Tercera etapa, una vez definido el tema de la investigación y el profesor que va a dirigirla, es importante comenzar con la elaboración del protocolo de investigación, para ello en el SIME-I el profesor a cargo trabaja los elementos que componen a un protocolo y establece un calendario de entregas de las distintas partes del mismo y junto con los directores se va trabajando en el cumplimiento de este calendario. Esta etapa termina con la presentación en plenaria del protocolo de investigación, el cual es evaluado por el sínodo asignado y el profesor del SIME-I.

Cuarta etapa, ésta se trabaja en el SIME-II y el laboratorio de didáctica de las matemáticas III. El profesor a cargo del SIME-I propone un calendario, en él se marcan las fechas de entrega de los distintos elementos que debe tener una tesis, la idea es colocar tiempos a fin de que se logre tener el borrador final de la tesis. Se comienza con la definición de un índice tentativo para la tesis, la finalidad es conocer la estructura que los directores y alumnos han definido para la tesis, es importante señalar que, cada investigación es un universo en sí misma, por ello el calendario marca tiempos de entrega, sin embargo, no trata de forzar los resultados.

A lo largo del semestre, se va realizando el trabajo de forma organizada y tratando de cubrir cada uno de los puntos puestos en el índice, para ellos, se parte de explicaciones teóricas y acompañadas de ejemplos, para que los estudiantes tengan bases más sólidas al momento de llevar a cabo su investigación; los estudiantes van presentando los avances de su investigación en plenarias y son retroalimentados por el profesor a cargo del seminario y comentados por sus compañeros de grupo. Es importante resaltar que, para el cumplimiento del calendario, es necesario el compromiso de los directores de la tesis, ya que son los que validan el trabajo que el alumno esta realizando.

Para aquellas tesis que tengan secuencias didácticas o diseños para el aula, hemos trabajo también una propuesta de trabajo por etapas: 1) Diseño, 2) Entrega de la primera versión, 3) Pruebas piloto y 4) Entrega de diseño revisado y corregido. Hasta ahora esta propuesta de trabajo nos ha funcionado bastante bien, ya que las versiones preliminares de las propuestas se ponen en escena con todos los estudiantes del PMCEME y hemos denominado a este trabajo pruebas piloto, las observaciones de los otros estudiantes que también son profesores, ayudan a modificar o corregir aquello que sea necesario en el diseño, de tal suerte que, cuando se pone en escena con los estudiantes del nivel escolar para el que fueron pensadas, hay mayor probabilidad de cumplan con el objetivo para el que fueron diseñadas.

La etapa cuatro concluye, con la entrega y presentación del borrador final de la tesis, el cual es evaluado por el sínodo asignado, el profesor del SIME-II y el del Laboratorio III.

Resultados

Los primeros resultados del trabajo realizado se puede observar en la tabla 2.

Tabla 2. Cuadro comparativo de los resultados de la implementación de la propuesta de formación de profesores-investigadores desde la matemática educativa

Generación	Estudiantes que ingresa	Estudiantes que egresan	Borradores de tesis entregados	Estudiantes graduados
2011-2012	**5**	**3**	**3**	**1**
2012-2013	**9**	**10***	**10**	**5**
2013-2014	**8**	**6**	**6**	**0**
2014-2015	**9**	**9**	**En proceso**	

Fuente: Elaboración propia, con base en la información del PMCEME.

*Se agregó al grupo un estudiante que pertenecía a la generación 2009-2010.

En esta tabla se puede observar la trayectoria que siguen los estudiantes del PMCEME de cuatro generaciones, cuantos ingresan y egresan y como todos los estudiantes que egresan entregan su borrador final de tesis.

Reflexiones finales

La propuesta de formación de profesores-investigadores desde la matemática educativa, es el resultado de un análisis profundo, sobre aquello que impedía que los estudiantes egresaran del PMCEME al menos con su borrador final de la tesis. Este análisis nos llevó a implementar una estrategia de trabajo que ha servido para para que este objetivo se cumpla, sin embargo, a pesar de los esfuerzos realizados por los alumnos y profesores ayudados de esta propuesta, hemos encontrado que el tener el borrador de la tesis no garantiza que los estudiantes tengan el grado, en este sentido, tendremos que replantear y dirigir los esfuerzos para que todo el trabajo realizado no se pierda.

Referencias

Godino, J. D. (2002). *Perspectiva de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica.* Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Loya, H. (2008). Los modelos pedagógicos en la formación de profesores. En *Revista Iberoamericana de Educación*, (43), 3-25.

Universidad Autónoma de Chiapas. (2000). *Plan de Estudios de la Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa.* Tuxtla Gutiérrez, Chiapas: Universidad Autónoma de Chiapas.

Factores Que Motivan A Mujeres A Estudiar Matemáticas: Revisión Bibliográfica

Gabriela Monserrat Camacho González, Juan Gabriel Molina Zavaleta, Alejandro Miguel Rosas Mendoza

Resumen

En este escrito se presenta una revisión bibliográfica; que centran la atención en los posibles factores que motivan a mujeres a estudiar matemáticas o a rechazarlas como una opción de carrera profesional.

Onion (2011) nos muestra los resultados de un estudio que realizó a personas adultas que tienen preparación básica, es decir sin grado o no calificadas en matemáticas, el cual tiene como eje central explorar las actitudes y experiencias que los adultos tienen de aprendizaje y uso de las matemáticas.

La autora denota la relevancia de su trabajo debido a lo poco común que es y las aportaciones relevantes que se obtienen en líneas de investigación que no están dirigidos a estudiantes especializados. La realización del estudio fue bajo el método de entrevistas no estructuradas y utilizaron el método "grounded theory" donde se clasificaron las respuestas en dos tipos: temas de contenido matemático y temas sin contenido matemático, obteniendo resultados destacables como: la percepción de las mujeres como poco aptas para las matemáticas a diferencia de sus maridos y sus hijos varones. Haciendo la omisión de nombrar a la única hija, resaltando con ello que perciben a las matemáticas como dominio exclusivo de los varones.

En una de las entrevistas se menciona una anécdota relevante en donde una de las compañeras de la entrevistada dejo de asistir a clase de matemáticas porque se sintió humillada cuando un profesor le lanzó un borrador y le pego en la sien; el comportamiento violento del profesor para con la estudiante fue un factor clave para que está dejara su clase, describiendo con ello un factor que puede alejar a las mujeres de estudiar matemáticas.

Buerk (1982) nos describe un estudio realizado a cinco mujeres adultas consideradas con una visión dualista (respuestas buenas o malas, correctas e incorrectas) de las matemáticas, a las cuales se les planteo el desarrollo de problemas matemáticos desde un punto de vista del constructo teórico del relativismo, es decir, estructura preguntas que a primera impresión no plantean una pregunta matemática y pueden ser abordadas desde la intuición. Al inicio del estudio las participantes expresan sentimientos como “ansiedad matemática” y se consideran poco hábiles para desarrollar con rapidez una respuesta matemática, esto a pesar de ser mujeres inteligentes o sobresalientes. La autora expresa cómo a través de cinco semanas de trabajar con ellas observó resultados alentadores y que la comprometen a seguir investigando sobre diferentes puntos de abordaje hacia las matemáticas y el desarrollo de pensamiento matemático ya que al finalizar el estudio las mujeres se perciben más entusiastas y cercanas a las matemáticas a través de plantear los problemas de forma relativista. El relativismo plantea la resolución de problemas de forma individual, el cual se comparte más adelante en grupo para comparar las diferentes formas de solucionar la misma pregunta y obtener diferentes puntos de vista a las participantes.

El método del relativismo fue el detonante principal para corregir las malas percepciones de las mujeres para con las matemáticas, creando en ellas seguridad, cercanía e incorporando la intuición al trabajar con matemáticas, resaltando un factor para acercar a las mujeres a estudiar matemáticas.

Piatek (2008) nos deja mirar un estudio donde explora la visión de las personas encuestadas sobre profesionistas que se dedican a las matemáticas y si ellas se consideran como un matemático en formación. Con el objetivó de encontrar la razón por la cual existe escases de mujeres dedicadas a las matemáticas o que seleccionan carreras de matemáticas y no alcanzan niveles de maestría y doctorado en matemáticas. El estudio se realizó con cinco mujeres que están en un pre nivel universitario, es decir, lo que en México equivale al bachillerato o vocacional utilizando el método de entrevistas semiestructuradas, en el cual se les realizaron 31 preguntas como: ¿Cuál es tu plan después de graduarte?, ¿a qué se dedican los miembros de tu familia?, etc., obtuvo como resultado que ellas ven a los profesionistas que se dedican a las matemáticas como: personas extremadamente inteligentes, personas que se obsesionan con las matemáticas todo el día y personas que son poco sociables. Destacando con ellos un factor de genero para dedicarse a las matemáticas; es decir que al ser obsesionados con las matemáticas no se ocupan de su apariencia física, algo que se considera femenino debido a que las mujeres se preocupan por cómo se ven; a pesar de ser buenas en matemáticas las consideran "duras" o que hay que trabajar mucho en ellas por ser mujeres. Ya que se les da mejor este trabajo a los hombres y al ser poco sociables descarta a las mujeres que suelen ser más sociables. Esto destaca la autora como profecía auto cumplida ya que al tener esta imagen ellas mismas se auto sabotean y solo tres de cinco se considera un matemático en creación.

La autora destaca en la conclusión del estudio que la falta de confianza, la falta de apoyo y la falta de interés tienen como efecto en las mujeres que no opten por una carrera de matemáticas, por lo cual habría que preguntarse ¿qué se hace mal en las aulas para que las mujeres desvíen su camino de las matemáticas o no permanezcan en ellas?, para corregirlo y lograr aumentar el número de mujeres que se dedican a las matemáticas.

Ida Friestad Pedersen (2013) nos muestra un estudio realizado para conocer las razones que un grupo de estudiantes Noruegos tienen para estudiar cursos avanzados de matemáticas en el último año de secundaria; los resultados de este estudio se comparan con los resultados de otros estudios similares realizados a estudiantes Australianos, y se resalta que la elección radica en el valor intrínseco de la decisión; es decir en las creencias de los estudiantes sobre estudiar matemáticas, las cuales están influenciadas por profesores, padres, amigos y otros factores. En la investigación se utilizaron cuestionarios enfocados en escuela, profesores y estudiantes; el cuestionario se dividía en tres partes una relacionada con el sexo del encuestado, la segunda parte estaba relacionada con la motivación para elegir materias de matemáticas avanzadas y la última parte cuestión sobre los planes que tienen después de la secundaria.

Se plantean cuatro constructos: *valor intrínseco,* que es el valor de disfrute de realizar una actividad ligada a las matemáticas; *valor de utilidad,* que se relaciona con la utilidad del curso de matemáticas para el estudiante; *valor de logro,* que tienen los estudiantes al realizar una actividad matemática con éxito y *valor de costo* que es lo que sacrifican los estudiantes al tomar materias avanzadas de matemáticas.

Los resultados enfocados a describir, qué motivan a las mujeres a estudiar matemáticas determina que: no se encontró una diferencia marcada de motivación; debido a que falta en el cuestionario una medida de *valor de consecución* a lo cual, la autora llama una debilidad de su estudio al igual que el estudio solo se focalizó en estudiantes del último año de secundaria y no considera los motivos que se tienen en grados menores.

Se puntualiza que en una de las tablas de resultados se observa que un 30% de las niñas encuestadas prefiere las ciencias de la salud contra el 9% de los niños, a diferencia de las ingenierías que reporta 41% de los niños prefieren estudiar ingeniería contra un 20% de las niñas, por lo que se pone de manifiesto que una razón es el proceso de socialización vinculado a los roles de género y que las niñas le dan más valor a ayudar a los demás con carreras relacionadas a las ciencias de la salud que haciendo carreras relacionadas con las matemáticas.

En conclusión podemos decir que es cuestión de creencias de las mujeres sobre que ayudan más en la sociedad siendo doctoras, enfermeras, veterinarias, etc. que siendo ingenieras o matemáticas.

Mendick (2005) nos reporta en el estudio que realizó mediante el constructo del dualismo a estudiantes de Inglaterra entre edades de 17 y 18 años, más o menos, destaca en las estadísticas gubernamentales como un porcentaje menor de mujeres eligen estudiar matemáticas a comparación del porcentaje de hombres, por lo que se decidió profundizar en el tema ¿por qué estudiar matemáticas y qué implicaba este camino?; la investigadora formó varios grupos, pero puntualizo en dos entrevistas realizadas a dos mujeres, Toni y Claudia, como es de esperarse son dos mujeres totalmente diferentes y mediante preguntas abiertas surgieron algunos comentarios destacables como el empoderamiento de estudiar matemáticas es un factor detonante para acercar a más mujeres a tomar está elección como un reto personal y empoderarse ante los compañeros del género masculino, se puede encontrar cómo analiza diferentes “campos” de forma dualista: *Biológico/Social, Individual/Social, Genero/Sexo* y *Masculino/femenino* con este contraste podemos visualizar una conclusión importante que el rol social de una mujer es orientado a lo que se denomina fuera del dominio masculino, por lo que si esto no fuera así habría más mujeres interesadas en estudiar matemáticas, ya que no tienen un impedimento biológico, es solo un limitante social el que genera un porcentaje menor de mujeres estudiando matemáticas por lo que se debería impulsar desde los maestros a que esto sea diferente, a que las niñas no sean orilladas a estudiar cosas sociales y mostrarles que tienen todas las posibilidades para estudiar ciencias como las matemáticas de la misma forma que los hombres.

Kleanthous (2013), crea una escala para medir la influencia parental, que describe cómo las opiniones de los padres, su experiencia y a lo que se dedican son proyectadas a los hijos afectando la opinión del estudiante sobre tomar cursos avanzados de matemáticas e investiga la asociación que existe entre la influencia parental y la disposición del estudiante hacia las matemáticas en un nivel preuniversitario, encontrando que dicha relación se puede explicar mediante el concepto de habito de Bourdieu (1977), que indica que un sistema de disposiciones a largo plazo es inculcado en primer plano por la familia y en segundo plano por la escuela de forma crucial para la disposición de un estudiante a preferir cursos de matemáticas.

Se creó un cuestionario dividido en la percepción de la influencia parental, la inclinación a las matemáticas, eficiencia matemática y la disposición para estudiar matemáticas (habitus), esté fue distribuido a 563 alumnos (266 del género masculino y 297 del género femenino) que rondan entre los 16 y los 17 años, logrando validar la escala y evidenciando que esta influencia de los padres es el factor que podría motivar a estudiantes (hombres o mujeres) a tomar cursos de matemáticas. Y está relacionado con que en su entorno familiar se fomente esto.

Monico (2015), Padrón (2015), Carrasco (2014), Sánchez et al. (2013) realizaron diferentes trabajos, utilizando el método de narrativas para identificar factores que pudieron haber influido para que chicas de diferentes estados de la República Mexicana estudiaran matemáticas como: influencia del profesor, se consideraban buenas en matemáticas, tenían gusto por las matemáticas, tuvieron apoyo familiar y participaron en concursos.

Se sugiere que los profesores son una pieza clave, por lo que ellos podrían ayudar al estudiante a construir una identidad de buen estudiante de matemáticas, además de organizar más concursos donde las chicas puedan desarrollar sus habilidades matemáticas, por otro lado se menciona que debería difundirse con mayor ímpetu la información respecto a la carrera de matemáticas y con ello alentar a más mujeres a tomar la decisión de estudiar matemáticas.

En resumen, nuestra revisión bibliográfica nos muestra los siguientes factores por los cuales mujeres estudiaron matemáticas:

1. Se consideraban buenas en matemáticas.
2. Recibieron apoyo familiar.
3. Participaron en concursos.
4. Fueron motivadas por profesores.
5. Conocer aplicaciones de las matemáticas las motivó.
6. Para destacar entre compañeros.
7. Tenían gusto por las matemáticas.
8. Para ayudar a la sociedad.
9. Influencia de otras materias.
10. Conocer la carrera de matemáticas

Referencias bibliográficas

Carrasco, L. (2014). Factores que favorecen la elección de las matemáticas como profesión entre mujeres veracruzanas (Tesis de maestría no publicada). UV. México.

Buerk, D. (1982). An Experience with some able women who avoid mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *3*(2), 19-24.

Kleanthous, I., Y Williams, J. (2013). Perceived parental influence and students' dispositions to study mathematically-demanding courses in Higher Education. *Research in Mathematics Education, 15*(1), 50-69. doi: 10.1080/14794802.2013.763608

Mendick, H. (2005). Mathematical stories: why do more boys than girls choose to study mathematics at AS-Level in England?. *British Journal of Sociology of Education, 26*(2), 235-251. doi: http://dx.doi.org/10.1080/0142569042000294192

Monico, R. (2015). Factores que favorecen la elección de las matemáticas como profesión entre mujeres guerrerenses. (Tesis de Licenciatura no publicada). UAGro, Unidad Académica de Matemáticas. México.

Onion, A. J. (2011). Women's stories of learning mathematics. *Research in Mathematics Education*, *13*(3), 307-308. doi: http//dx.doi.org/10.1080/14794802.2011.624757

Piatek, J. K. (2008). Images of mathematicians: a new perspective on the shortage of women in mathematical careers. *Research in Mathematics Education,* 40,633-646. doi: 10.1007/s11858-008-0126-8

Pedersen, I. F. (2013). “I need advanced mathematics to pursue the career of my choice”. Norwegian students’ motivations for enrolling in mathematics and plans for post-secondary studies. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *18* (1), 61–83.

Análisis Teórico Para La Construcción Del Concepto De Ecuación Diferencial Ordinaria De Primer Orden Mediante La Descomposición Genética

Abel Medina Mendoza, Alejandro Miguel Rosas Mendoza
Instituto Tecnológico de Comitán, Instituto Politécnico Nacional

Resumen

El presente documento muestra un avance del primer componente, planteado en el diseño metodológico del proyecto de investigación doctoral en Matemática Educativa, que tiene el objetivo de desarrollar en los estudiantes, la competencia específica de construir el concepto de ecuación diferencial ordinaria de primer orden, mediante la descomposición genética para su aplicación en la solución de problemas de circuitos eléctricos; fundamentándose del marco teórico y la metodología de la teoría APOE (acción, proceso, objeto y esquema).

Palabras Claves: APOE, Descomposición Genética, Ecuación Diferencial.

Introducción

Se presenta la problemática haciendo un análisis de investigaciones. En primer término se aborda el desarrollo de competencias en Matemática Educativa, al respecto Benítez (2011), muestra la importancia de las competencias tanto para la comprensión del discurso de las ciencias como para su aplicación en la solución de problemas. En segundo término investigaciones que muestran dificultades en la comprensión o aplicación del concepto de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), al respecto, Perdomo (2011), realiza la comparación de la enseñanza y aprendizaje de las EDO, mediante la formación tradicional del concepto y la formación mediante resolución de problemas, la tecnología y la interacción en el proceso de aprendizaje, Villar-Liñan y Llinares-Ciscar (1996), mencionan las dificultades al definir el concepto de la ecuación diferencial (ED), de igual forma Rasmussen (2001) y Zandieh y McDonald (1999), describen las dificultades en la concepción de la solución de una ED. Guerrero, Camacho y Mejía (2010), abordan las dos dificultades anteriores en problemas del concepto matemático para su aplicación de nuevos contextos de conocimiento, como el bosquejo de campos de direcciones y la interpretación de soluciones, así mismo Rodríguez (2012) y Codes y Perdomo (2012), experimentan con el uso de la tecnología para la introducción y visualización del concepto de EDO, para facilitar la solución de las dificultades antes planteadas.

Con la aportación de las investigaciones se establece la problemática mediante la determinación de las preguntas de investigación, principal y auxiliares que contemplan las dimensiones: desarrollo de competencias en Matemática Educativa, dificultades en la comprensión o aplicación del concepto de EDO, la Teoría APOE en la Matemática Educativa, que conducen a determinar los elementos teóricos y metodológicos.

Dentro del apartado de elementos teóricos se aborda en específico una teoría, de tipo cognitivo-constructivista llamada Teoría APOE, con sus construcciones mentales: Acción, Proceso, Objeto y Esquemas. Así mismo se aborda la descomposición genética como eje de aplicación de la Teoría APOE.

Partiendo de los elementos teóricos, la Teoría APOE tiene su metodología de investigación asociada para garantizar la confiabilidad de los resultados. De tal forma que se presenta la metodología fundamentada en el ciclo de investigación dado por la Teoría APOE.

Problemática

En este apartado se presenta un análisis de investigaciones en el contexto de competencias en Matemática Educativa, esto permitirá enmarcar las dimensiones de las preguntas de investigación.

Desarrollo de competencias en Matemática Educativa

En el trabajo de Benítez (2011), su objetivo fue identificar los niveles de competencias matemáticas, que se refieren al dominio, por parte del estudiante, de los conocimientos, habilidades, valores y actitudes que son indispensables tanto para la comprensión del discurso de las ciencias, las humanidades y la tecnología, como para su aplicación en la solución de los problemas de su vida escolar, social y laboral, adquiridos cuando se promueve el estudio de contextos evocados introductorios; (D'amore, Fandiño y Marazzani, 2003), definen que los contextos evocados introductorios son aquellos que se presenta al inicio del proceso de instrucción donde se han enseñado los objetos matemáticos necesarios para la resolución del problema, y cuyo propósito es que el alumno vea las aplicaciones de las matemáticas al mundo real. Las representaciones (Duval, 1999) juegan un papel fundamental para dicho trabajo. La investigación se ubica en un paradigma de investigación cualitativo, los instrumentos utilizados para la recolección de datos fueron: reportes escritos elaborados de manera individual y por equipo, grabaciones en audio y reportes elaborados por el profesor-investigador. La autora señaló en las conclusiones, que durante el proceso de aprendizaje en contextos simulados, sufrió altas y bajas, principalmente en las actividades para construir o interpretar las situaciones que se planteaban. El análisis de los datos permitió identificar tres niveles de Competencias Matemáticas: Identificación que el estudiante hace de las características relevantes de la situación, el establecimiento de relaciones en las representaciones para construir un modelo matemático y el uso que hace del modelo para conseguir el objetivo predeterminado.

Este análisis nos lleva a considerar las dificultades en la comprensión o aplicación del concepto de EDO, ya que nos permitiría contextualizar la importancia del desarrollo de competencias en el aprendizaje.

Dificultades en la comprensión o aplicación del concepto de EDO

Distintas investigaciones en el campo de la Educación Matemática han revelado un conjunto de dificultades que los estudiantes se han encontrado en el proceso de aprendizaje de las EDO, de las cuales se pueden citar:

En el artículo de Perdomo (2011), presenta una investigación relacionada con los procesos de enseñanza y aprendizaje de las EDO, donde se distinguen dos partes principales: análisis de la forma en que un grupo de estudiantes que han recibido una formación tradicional del concepto utilizan sus conocimientos matemáticos para resolver problemas y responder a cuestiones relacionadas con las EDO y, el análisis del papel que la resolución de problemas, la tecnología y la interacción juegan en el proceso de aprendizaje. El análisis de los datos obtenidos en la primera fase, permitieron constatar que el enfoque de enseñanza habitual, en el que se introduce el concepto a partir de su definición formal y los métodos algebraicos de resolución, no favorece el desarrollo de la comprensión del concepto. El análisis con el uso de la herramienta tecnológica y el modelo de trabajo en el aula, contribuyeron a crear un clima de indagación, reflexión, planteamiento de conjeturas y verificación.

Villar-Liñan y Llinares-Ciscar (1996), establecen el modo en que los estudiantes son capaces de definir el concepto de ED y la proximidad entre esta definición y la definición formal. Los resultados de esta investigación muestran que aunque sólo la décima parte de los estudiantes definió de forma precisa el concepto de ED, señalando con ejemplos diferentes EDO de variables separadas o lineales, casi la mitad de los alumnos propuso ejemplos correctos de ED. Esto llevó a los autores a concluir que “el hecho de no definir una noción no es obstáculo para su identificación en un determinado contexto” y que “la imagen del concepto (de ecuación diferencial que tienen los alumnos) está muy ligada a expresiones formales, casos particulares y ejemplos concretos” (p. 99).

Rasmussen (2001), hace referencia a las dificultades que entraña el concepto de solución de una ED. Estas dificultades las asocia con el hecho de que es un espacio formado por funciones y no por valores numéricos. Esta conclusión la extrae de un estudio sobre la concepción que tienen los estudiantes acerca de las soluciones de equilibrio de una EDO, las aproximaciones numéricas y la estabilidad. Zandieh y McDonald (1999), identificaron esta misma dificultad en una investigación. Los autores apuntan como posible causa de estos errores conceptuales al hecho de que en muchas de las actividades que realizan los estudiantes no es necesario pensar en la variable, considerando ecuaciones de la forma $y' = f(x, y)$, como una solución o una función.

Guerrero, Camacho y Mejía (2010), también observaron que los estudiantes consideraban las funciones constantes sólo como números y no como funciones. Estos autores realizan una investigación haciendo uso del registro gráfico como medio de solución de EDO. Los resultados de esta investigación muestran que los estudiantes recuerdan las definiciones de algunos conceptos de cálculo pero les resulta imposible aplicarlas en un nuevo contexto de conocimiento, en este caso, el bosquejo de campos de direcciones y la interpretación de soluciones.

En el trabajo de Rodríguez (2012), que tiene como objetivo que el alumno comprenda el modelo para representar, comprender y estudiar diversos fenómenos de naturaleza social, química, mecánica y eléctrica, así como la importancia de la visualización de representaciones de diversos aspectos de la ED a través del uso de tecnología. La autora realiza la investigación de tipo cualitativa. Concluyendo que el diseño de las actividades como observación, videograbaciones, realización de reactivos permitió alcanzar los objetivos previstos para el proceso de modelación matemática y la tecnología utilizada constituye un apoyo importante en la transición entre el dominio físico y matemático así como el desarrollo de competencias tecnológicas.

En el taller "Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias a partir del análisis de fenómenos de variación" de Codes y Perdomo (2012), presentan un conjunto de actividades tanto para realizar de forma individual como en pequeños grupos con lápiz y papel y, con el software de cálculo simbólico Maple, para introducir el concepto de EDO. Los resultados obtenidos sirvió para reflexionar sobre los conocimientos previos necesarios (como Algebra), para el diseño de cuestionarios y actividades de trabajo en el aula.

El análisis realizado de cada una de las investigaciones presentadas sobre las dificultades en la comprensión o aplicación del concepto de EDO, me permitió visualizar el papel tan importante que juega la resolución de problemas, el uso de tecnología y la interacción en el proceso de aprendizaje, de igual forma que la comprensión del concepto matemático está muy ligada a expresiones formales y modelación de casos contextuales en donde el uso de registros gráficos son un medio adecuado para la solución de EDO. Lo anterior permite que los estudiantes logren comprender el concepto de EDO, aunque en un inicio se veía muy distante.

Pregunta principal

¿Cómo desarrollar la competencia de construir el concepto de ecuación diferencial ordinaria de primer orden para su aplicación en la solución de problemas de circuitos eléctricos en los estudiantes de Ingeniería en Sistemas Computacionales del Instituto Tecnológico de Comitán?

Y las preguntas auxiliares:

- ¿Con el desarrollo de la competencia específica, que aborda la problemática, el estudiante comprende el concepto de la EDO de primer orden?
- ¿Con la construcción del concepto de ED el estudiante logra aplicarlo adecuadamente en la solución de problemas de circuitos eléctricos?
- ¿Cómo estimular en los estudiantes, el desarrollo de la competencia específica de construir el concepto de EDO de primer orden?

Marco Teórico

Partiendo de la problemática de investigación que es “Desarrollar la competencia específica de construir el concepto de ecuación diferencial ordinaria de primer orden mediante la descomposición genética para su aplicación en la solución de problemas de circuitos eléctricos”, los elementos teóricos a considerar se enmarcan en la Teoría APOE.

La Teoría APOE es una teoría de tipo cognitivo-constructivista iniciada por Dubinsky y continuada por el grupo de investigadores llamados *Research in Undergraduate Mathematics Education Community* (RUMEC); El APOE se inició en Estados Unidos y se ha extendido a otros países (entre ellos México) a partir de la formación del RUMEC, cuya investigación está centrada en cómo un sujeto construye conceptos matemáticos y adquiere habilidades para enfrentar y resolver problemas (Miranda, 2003). Encontrando que la Teoría APOE (por sus siglas en inglés: Acción, Proceso, Objeto, Esquema) resulta ser un marco teórico ideal debido a que, por un lado ha demostrado su eficiencia en trabajos de investigación.

La descomposición genética, según Badillo (2003) es el eje de la aplicación de la Teoría APOE en estudios sobre la comprensión de objetos matemáticos porque permite estructurar el concepto matemático, orienta a la organización del contenido a enseñar y el diseño de actividades y tareas que contribuyan a la construcción de las estructuras que se busca que los estudiantes desarrollen.

Metodología

La Teoría APOE tiene una metodología de investigación fundamentada en el ciclo metodológico de investigación de dicha teoría (Análisis teórico, Diseño y aplicación de instrumentos y; Análisis y verificación de datos).

Análisis teórico: El objetivo central es diseñar la descomposición genética de los conceptos matemáticos de la investigación.

Diseño y aplicación de instrumentos: Una vez definida la descomposición genética original, es necesario documentarla. El objetivo central es el diseño y aplicación de instrumentos que ayuden a construir los conceptos matemáticos de la investigación y posteriormente el diseño y aplicación de los instrumentos que nos ayudarán a validar la propuesta didáctica e identificar las construcciones mencionadas en la descomposición genética.

Análisis y verificación de datos: El objetivo central es llevar a cabo el análisis de los datos empíricos obtenidos de la componente anterior. En este punto determinar si fueron adecuados los elementos considerados de la descomposición genética de los conceptos matemáticos de la investigación.

En el presente trabajo, se aborda parte del primer componente (Análisis teórico) como avance del proyecto de investigación doctoral, para estructurar una definición analítica del concepto de EDO de primer orden, se realiza una revisión en siete libros en la temática de ecuaciones diferenciales. A continuación se describe cada una de las definiciones que se abordan:

Zill (1988,1997), afirma que si una ecuación contiene las derivadas o diferenciales de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes, se dice que es una ED. Clasifica a las ED de acuerdo con las tres propiedades:

- ✓ Tipo: ED ordinaria como aquella que contiene solo derivadas ordinarias de una o más variables dependientes con respecto a una sola variable independiente y la ED parcial como aquella ecuación que contiene las derivadas parciales de una o más variables dependientes de dos o más variables independientes.
- ✓ Orden: Precisa que el orden de una ED es el orden de la más alta derivada de la ED.
- ✓ Linealidad: Hace notar que las ED lineales se caracterizan por dos propiedades, la variable dependiente y junto con todas sus derivadas son de primer grado, esto es la potencia de cada término en y es 1, y cada coeficiente depende sólo de la variable independiente x. Y concluye que una ecuación que no es Lineal se dice No Lineal.

Nagle, Saff y Snider (2005), definen que una ecuación que contiene algunas derivadas de una función incógnita es una ED. No clasifican de manera directa a las ED, pero citan que una ecuación diferencial ordinaria es aquella que sólo implica derivadas ordinarias con respecto a una sólo variable independiente y que ED que implica derivadas parciales con respecto más de una variable independiente es una ED parcial. Así mismo mencionan que el orden de una ED es el orden de las derivadas de orden máximo que aparecen en la ecuación. Consideran que es útil clasificar las EDO como lineales y no lineales, una ED lineal es aquella en que la variable dependiente *y* y sus derivadas sólo aparecen en combinaciones aditivas de sus primeras potencias, de lo contrario es una ED no lineal.

Edwards y Penney (2009), definen que la ED es aquella ecuación que relaciona una función desconocida con una o más de sus derivadas. De la misma manera que en Nagle, Saff y Snider (2005), no hacen una clasificación general de las ED, pero a lo largo del contenido, mencionan que cuando una ED es ordinaria significa que la función desconocida (variable dependiente depende de una sola variable independiente), si la variable dependiente es una función de dos o más variables independientes entonces aparecerán derivadas parciales, si es así la ecuación se llama ED parcial. El orden de una ED es el orden de la derivada más alta que aparece en ella. Citan que la ED es lineal si la función es lineal en la variable dependiente *y* y en sus derivadas *y'* y *y''*, de lo contrario la ED será no lineal.

En el libro de Ecuaciones Diferenciales con problemas con valores en la frontera de Zill y Cullen (2009), se define que una ED es una ecuación que contiene derivadas de una o más variables respecto a una o más variables independientes, y se clasifican:

- ✓ Tipo: Si una ecuación contiene sólo derivadas de una o más variables dependientes respecto a una sola variable independiente se dice que es una EDO, una ecuación que involucra derivadas parciales de una o más variables dependientes de dos o más variables independientes se llama ED parcial.

- ✓ Orden: El orden de una ED es el orden de la mayor derivada en la ecuación.

- ✓ Linealidad: Una ecuación diferencial de *n*-ésimo orden se dice que es lineal si la función es lineal. Una ED es no lineal cuando las funciones de la variable dependiente o de sus derivadas son no lineales.

Carmona (2011), define que la ED es aquella ecuación que contiene derivadas o diferenciales. Clasifica en tres categorías a las ED:

Tipo: Define que una ED ordinaria es aquella que contiene derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una sola variable independiente y la ED parcial contiene derivadas parciales de una o más variables dependientes con respecto a dos o más variables independientes.

Orden: Lo define como la derivada de mayor orden contenida en la ecuación. Grado: Es la potencia a la que esta elevada la derivada de mayor orden.

Ibarra (2013), describe que una ED es una ecuación que contiene la derivada o las derivadas de una o más variables dependientes respecto de una o más variables independientes. Menciona que básicamente, las ecuaciones pueden clasificarse por su tipo, orden, linealidad y grado. De acuerdo con su tipo, las ED pueden clasificarse en ordinarias, una ED se dice ordinaria si contiene la derivada o las derivadas de una o más variables dependientes respecto de una sola variable independiente y una ED se denomina parcial si contiene la derivada o las derivadas de una o más variables dependientes respecto de dos o más variables independientes. El autor define el orden de una ED como el orden de la derivada más alta que aparece en la ecuación. De igual forma, una ED lineal tiene propiedad que la variable dependiente y todas sus derivadas están elevadas a la potencia 1, de lo contrario la ED es No Lineal. Por último señala que el grado de una ED es la potencia más grande a la cual está elevada una variable dependiente, o bien alguna de sus derivadas.

Çengel y Palm (2014), especifican que una ecuación que incluye las derivadas de una o más funciones se llama ED. De manera general explican la clasificación de las ED, donde mencionan que las EDO son aquellas que contienen derivadas ordinarias de una o más variables dependientes con respecto a una sola variable independiente, y la ED es parcial cuando la ecuación incluye derivadas parciales con respecto a dos o más variables independientes. A su vez que, una ED puede incluir distintas derivadas de varios órdenes de una función incógnita en donde el orden de la derivada más alta determina el orden de la ED y que, una ED es lineal si la variable dependiente y todas sus derivadas son de primer grado y sus coeficientes solo dependen de la variable independiente.

Aún no se cuentan con resultados, pero retomando las definiciones anteriores se logró definir el concepto de ecuación diferencial ordinaria de primer orden:

Es la expresión matemática que contiene las derivadas o diferenciales, de orden uno, de una o más funciones desconocidas (variables dependientes) con respecto a una variable independiente.

Conclusiones

Con el análisis bibliográfico se avanzó con una parte del primer componente (Análisis teórico) de la metodología del trabajo de investigación doctoral. Donde se llega a las siguientes consideraciones:

- ✓ En ninguno de los materiales revisados se aborda el concepto de ecuación diferencial considerando su descomposición genética.
- ✓ Por lo anterior se requiere hacer revisión del concepto de ecuación diferencial en trabajos de investigación o bibliografía de Matemática Educativa para poder concretar dicho concepto.
- ✓ La importancia de evaluar los conocimientos previos que se tienen contemplado realizar en éste mismo componente (actividad de cuestionario a estudiantes).

Referencias

Badillo, E. (2003). *La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemáticas de Colombia* (Tesis de Doctorado no publicada). Universidad Autónoma de Barcelona. España.

Benítez, A. (2011). La Importancia de los Eventos Contextualizados en el Desarrollo de Competencias Matemáticas. *Acta Latinoamérica de Matemática Educativa*, 51-59.

Carmona, I. (2011). *Ecuaciones Diferenciales* (5ª ed.). México: PEARSON Educación.

Çengel, Y. y Palm, W. (2014). *Ecuaciones Diferenciales para Ingeniería y Ciencias*. México: Mc GRAW-HILL/INTERAMERICANA.

Codes, M. y Perdomo J. (2012, febrero). *Introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias a partir del análisis de fenómenos de variación.* Taller presentado en el III Seminario del Grupo de Investigación en Didáctica del Análisis Matemático, Salamanca, España.

Duval R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues For Learning. In F. Hitt (Ed.), *Proceedings of the Twenty-first Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 3-26). Morelos: ERIC

D'Amore, B., Fandiño, M.I. y Marazzani, I. (2003). Ejercicios anticipados y Zona de desarrollo próximo: comportamiento estratégico y lenguaje comunicativo en actividad de resolución de problemas. *Epsilon* 57, 357-378.

Edwards, H. y Penney, D. (2009). *Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores en la frontera* (4ª ed.). México: PEARSON Educación.

Guerrero, C., Camacho, M., y Mejía, H. (2010). Dificultades de los estudiantes en la interpretación de las soluciones de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias que modelan un problema. *Enseñanza de las Ciencias, 28*(3), pp.341–352.

Ibarra, J. (2013). *Matemáticas 5 Ecuaciones Diferenciales*. México: Mc GRAW-HILL/INTERAMERICANA.

Miranda, E. (2003). La construcción de un concepto matemático. *Renglones, 54*, 20-24.

Nagle, K., Saff, E. y Snider, A. (2005). *Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores en la frontera* (4ª ed.). México: PEARSON Educación.

Perdomo, J. (2011). Módulo de enseñanza para la introducción de las ecuaciones diferenciales ordinarias en un ambiente de resolución de problemas con tecnología. *Números, 78*, 113-134.

Rasmussen, C. (2001). New directions in differential equations. A framework for interpreting students' understandings and difficulties. *Journal of Mathematical Behavior, 20*, 55-87.

Rodríguez, R. (2012, mayo). *Competencias de modelación y uso de tecnologías en ecuaciones diferenciales*. Proyecto de investigación presentado en la Coorporación Universitaria para el Desarrollo de Internet A.C., Baja California, México.

Villar-Liñan, M. T., y Llinares-Ciscar, S. (1996). Análisis de errores en la conceptualización y simbolización de ecuaciones diferenciales en alumnos de químicas. *Educación Matemática, 8*(2), 90-101.

Zandieh, M., y McDonald, M. (1999). Student Understanding of Equilibrium Solution in Differential Equations. En F. Hitt y M. Santos (Eds.). *Proceedings of the Twenty-one Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 253-257). Columbus, OH: ERIC.

Zill, D. (1988). *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones* (2ª ed.). México: Iberoamérica.

Zill, D. (1997). *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones* (3ª ed.). México: Iberoamérica

Zill, D. y Cullen, M. (2009). *Ecuaciones Diferenciales con problemas con valores en la frontera* (7ª ed.). México: CENGAGE Learning.

Los Profesores De Matemática En Formación En Uruguay: Un Análisis De Las Interacciones En La Clase De Su Práctica Docente

Daniela Pagés Rostán, Javier Lezama Andalón, Mónica Olave Baggi
CICATA – IPN, CICATA – IPN, Consejo de Formación en Educación - Uruguay

Resumen

Se presenta una investigación que analiza las dificultades de algunos estudiantes de Profesorado público de Matemática de Uruguay, cuando desarrollan su rol de profesores en el último curso de la Práctica Docente. Estas dificultades radican en la planificación y puesta en práctica de la clase, y parecen mostrar un desencuentro entre los aspectos teóricos que se trabajan en los cursos de Didáctica, y los elementos que toman en cuenta los estudiantes en sus clases. Para la investigación se tomó como marco teórico la aproximación interaccionista en Educación Matemática, basada en el Interaccionismo Simbólico. Según este, toda tarea planteada en la clase de matemática encierra cierta ambigüedad, y por tanto es necesaria una interpretación de los estudiantes. A su vez, el profesor debe interpretar las respuestas que aquellos le ofrecen. Así, el conocimiento matemático resultante es producto de una negociación, la que se produce a través de las interacciones de la clase. En este trabajo se analizaron las interacciones que el profesor y los estudiantes estructuran entre sí, a partir de cuatro clases videograbadas de cada uno de tres estudiantes de Profesorado de Matemática. Se estudió la existencia de patrones de interacción inconscientes, y constituidos interactivamente, que empobrecen los significados negociados.

Palabras clave: Estudiantes de profesorado – Práctica Docente – Interacciones – Patrones - Significados

Se presenta una investigación que analiza una problemática vinculada a la formación de profesores de matemática en Uruguay. La formación docente pública en Uruguay es de carácter terciario, no universitario y tiene una duración de cuatro años. Se estructura con base en tres pilares: la formación en las ciencias de la educación, la formación técnico-disciplinar y la formación en didáctica específica.

El tercer pilar se compone de las asignaturas: Introducción a la Didáctica, Unidad Didáctica-Práctica Docente I, II y III, Análisis del Discurso Matemático Escolar e Historia de la Matemática.

En todos los cursos donde el estudiante realiza práctica docente en un liceo de Enseñanza Secundaria, el profesor de Didáctica visita al estudiante en las clases que tiene que dictar, y luego de observarlas, discute con el estudiante y el profesor adscriptor (o solo con el estudiante en el último año) acerca de la misma, en el marco del curso teórico.

En oportunidad de dichas visitas observamos muchas veces que estudiantes con buenos desempeños en el curso teórico de la Unidad Didáctica Práctica Docente, parecen no tomar en cuenta los elementos que estos les aportan para organizar y desarrollar sus clases. Aún en el caso de planificar atendiendo a los aportes de metodologías de enseñanza alternativas, y a las recomendaciones acerca de la enseñanza de determinado tópico, que emergen de las investigaciones en el campo de la ME, en la clase se posicionan de manera “tradicional”. La forma en que desarrollan la discusión de los problemas, el tipo de preguntas que realizan a los estudiantes, el modo en que presentan un conocimiento en clase y cómo lo hacen evolucionar, no permiten la reflexión, discusión conjunta, y el desarrollo de un pensamiento matemático enriquecido en los estudiantes a los que les dan clase. Daría la impresión de que tampoco toman en cuenta los diferentes abordajes y modos de pensamiento que los estudiantes tienen. Parecería que los conocimientos que los Estudiantes de Profesorado de Matemática (en adelante EPM) deberían construir en los cursos teóricos de Didáctica, no les servirían de insumos a la hora de planificar y llevar adelante clases, es decir, que no habrían establecido un vínculo entre las dos componentes de los cursos de Didáctica de la Matemática del profesorado (curso teórico de Didáctica y práctica docente).

Para abordar el análisis de esta problemática, se atendieron las interacciones que el EPM realiza y promueve al ejercer el rol docente, en su práctica docente con un grupo a cargo, en el último curso de Didáctica de la carrera de profesorado.

Los objetivos planteados en esta investigación fueron:

- Analizar las interacciones que los EPM llevan adelante con sus alumnos, en la práctica docente.

- Describir, a partir del análisis de dichas interacciones, qué patrones de interacción se establecen entre los EPM y sus alumnos.

La pregunta de investigación formulada fue la siguiente:

¿Qué patrón de interacción predomina en las clases de cada EPM?

El marco teórico

Como marco teórico se utilizó la aproximación interaccionista en Educación Matemática. La misma se basa en la microsociología, y está influenciada particularmente por el interaccionismo simbólico (Blumer, 1969; Mead, 1934, citados por Voigt, 1995, p. 166) y por la etnometodología (Garfinkel, 1967; Mehan, 1979, citados por Voigt, 1995, p. 166).

Bauersfeld, Krummheuer y Voigt (1988, citado por Voigt, 1995, p. 166) adaptaron los conceptos del interaccionismo a la Educación Matemática. Esta aproximación en la investigación sobre el desarrollo cognitivo, considera que la evolución del conocimiento matemático, así como sus fuentes, tienen una gran influencia sociocultural (Sierpinska y Lerman, 1996, p. 13). Se parte de considerar a la matemática como resultado de los procesos sociales (Lakatos, 1976; Wittgenstein, 1967, citados por Voigt, 1995, p.165), y no como un conjunto de relaciones verdaderas, objetivas e inmutables entre objetos, como lo establecen las teorías platónicas o intuicionistas.

Los investigadores que siguen la aproximación interaccionista consideran que todo lo tratado en la clase de matemática es ambiguo, y por tanto está sujeto a la interpretación de cada participante. Esto contradice la creencia popular de que los objetos de la matemática (y de la clase) tienen un significado único e inmutable, por tanto el mismo para todos los participantes de la cultura.

El sujeto construye activamente el significado y las relaciones que le permiten aprender, a través de las situaciones sociales de interacción y negociación. Mediante ellas, y partiendo de sus conocimientos de base, da sentido a los objetos y establece un contexto a partir del que realiza una interpretación. Este proceso le permite al individuo construir conocimiento socialmente compartido y desarrollar estructuras subjetivas para ese conocimiento. Los autores enfatizan en la construcción de la intersubjetividad a través de estos procesos, la que es específica del contexto y la situación. (Bauersfeld et al., 1985, Voigt, 1995).

Así, tiene gran importancia la interpretación de los eventos de la clase, que realizan los participantes (en este caso el EPM y sus alumnos) en base a sus ideas subjetivas de cómo la clase debe funcionar, así como acerca del tema que se está tratando (patrones de experiencia).

Lo esencial para la aproximación interaccionista no es tanto que el docente y los estudiantes "compartan conocimiento", sino que a través de la negociación, constituyan conocimiento que pueda tomarse por compartido (Voigt, 1995, p. 172).

Un significado que se toma por compartido no es un elemento cognitivo, sino que existe en el nivel de la interacción. (Voigt, 1998). Para producir estos significados matemáticos es fundamental el proceso de negociación.

En este trabajo distinguiremos entre la microcultura tradicional, y la microcultura investigativa, que se describen en el marco teórico.

Wood (1994) en particular, diferencia estos dos tipos de clase, tomando el punto de vista de que los significados se negocian en las interacciones de la clase, y usando como criterio la función que cumplen las preguntas del docente. En las clases llamadas tradicionales, la negociación de signficado solo consiste en que los estudiantes aprendan lo que el docente ya sabe. En estas clases, el profesor realiza preguntas para evaluar si el estudiante conoce la respuesta que él espera, para dirigir a los estudiantes hacia un método o una solución oficialmente aceptados, o para redirigir si hay respuestas divergentes. Se ha observado en las clases analizadas, que muchas veces la intención es acentuar el desequilibrio de poder que existe. En las clases investigativas, se revela una relación más igualitaria entre el docente y los estudiantes. Las preguntas se realizan para sugerir nuevos aspectos que los estudiantes no han considerado antes, para incluir a los que no han respondido y procurar que comprendan, para conocer lo que el estudiante está pensando, para promover que reflexione sobre su propio pensamiento.

Otra diferencia que plantean los autores entre los dos tipos de microculturas de clase, es la responsabilidad que asumen los estudiantes acerca de las respuestas que dan y de las resoluciones de los problemas. En las clases tradicionales los estudiantes pueden participar aunque no se involucren en un pensamiento matemático. Alcanza con que tengan el comportamiento adecuado siguiendo las acciones del profesor. En cambio, en las clases investigativas, los estudiantes se responsabilizan por sus respuestas, ya que deben argumentar las mismas.

Los patrones de interacción

Un *patrón de interacción* es una estructura de interacción cara a cara entre dos o más sujetos, tal que:

- sirve para reconstruir una regularidad específica de interacción focalizada en un tema,
- refiere a acciones concertadas, interpretaciones y mutuas percepciones de al menos dos participantes, y no es la suma de sus acciones individuales,
- la estructura no es explicable por un conjunto de reglas,

- los participantes en esa estructura la generan de manera inconsciente y sin un propósito estratégico, la constituyen rutinariamente. (Voigt, 1985).

El autor describe dos patrones contrapuestos: el extractivo (elicitation) y el de discusión. En tanto Wood (1994) diferencia los patrones de embudo (funnel) y de focalización. A continuación se presenta un cuadro donde se ensamblan estos cuatro patrones, a partir de sus características y su momento de aparición en episodios de una clase.

<table>
<tr><td colspan="2">Patrón extractivo</td></tr>
<tr><td colspan="2">Fase 1
El docente presenta una tarea (pregunta o problema), los estudiantes plantean respuestas, el docente las evalúa preliminarmente (correctas, incorrectas, útiles, etc.). Esto sigue hasta que el docente encuentra una respuesta útil a sus objetivos.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Fase 2
Desarrollo guiado de la solución definitiva. El docente, a través de pistas, gestos, nuevas preguntas, va guiando las respuestas de los estudiantes.</td></tr>
<tr><td>Fase 3
El docente realiza una evaluación del método empleado y del resultado obtenido, y se reflexiona sobre el contexto. Esta fase no siempre se da.</td><td>Patrón de embudo (funnel)

Los estudiantes no logran responder lo esperado por el docente, entonces este interviene de forma más directa, con preguntas que van reduciendo el campo de acción del estudiante, y le van señalando la respuesta esperada.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">Patrón de discusión</td></tr>
<tr><td colspan="2">Fase 1
El docente propone una tarea, preferentemente para hacer en grupos, pero puede ser individual.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Fase 2
El docente pide a los estudiantes que expongan lo que hicieron, y lo justifiquen.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Fase 3
Un estudiante (o varios) da su solución, explicando.</td></tr>
<tr><td>Fase 4 (Puede mezclarse con la 3)</td><td>Patrón de focalización</td></tr>
</table>

El profesor realiza preguntas, comentarios para enfatizar, o para aclarar o profundizar. Pregunta por otras resoluciones.	Las preguntas del docente tienen como objetivo focalizar la atención de los estudiantes en algún aspecto del problema, que es crucial para el significado que el docente quiere promover, o que no han tenido en cuenta en la resolución.
Fase 5 Otros estudiantes explican su solución.	

Metodología de la investigación

Para determinar el patrón de interacción predominante en las clases de cada EPM, se observaron cuatro clases de cada uno de los tres EPM que participaron del trabajo. Estas fueron videograbadas y posteriormente transcriptas. Se elaboró un protocolo de observación de clases, a partir de la tabla anterior y la determinación de criterios de clasificación (ver Anexo).

La información acerca de cuál es el patrón de interacción predominante en la práctica de cada EPM participante, y la caracterización del tipo de clase que desarrollan, se utilizó para inferir si los EPM asumen los lineamientos que se plantean en los cursos de Didáctica, o existe un cierto divorcio entre la teoría (ME) y su práctica docente.

Resultados de la investigación

En esta presentación se describirá el patrón predominante de cada uno de los EPM, a partir del análisis de las interacciones desarrolladas en sus clases con sus alumnos.

En el caso del EPM1, concluimos que establece con sus estudiantes, de forma predominante, el patrón extractivo. El mismo se transforma en patrón de embudo en aquellos casos en que se quiere definir un concepto y los alumnos no aciertan con la forma que el EPM1 espera.

En relación al EPM2, en el planteo inicial intenta un trabajo hacia el desarrollo de una clase investigativa, lo que se aprecia en el hecho de anteponer las actividades al tratamiento teórico de los conceptos. Pero desarrolla con sus alumnos el patrón extractivo en algunos casos en que no recibe la respuesta esperada, y también el patrón de embudo.

En el caso del EPM3, observamos que tiene, en las interacciones con sus alumnos, una intención dialógica, y realiza esfuerzos por interpretar el pensamiento que los lleva a respuestas erróneas y hasta divergentes. Sin embargo, cuando el EPM3 tiene que institucionalizar con los alumnos el resultado al que han llegado, y darle forma de resultado matemático, no puede conciliar su intención de que ellos expresen las relaciones que han encontrado, porque pretende que utilicen el vocabulario propio del enunciado “oficial” de dicha proposición. Cuando el EPM3 va en busca de un resultado disciplinar formal, la clase se vuelve más tradicional, y se configura el patrón extractivo.

A partir de los resultados de este trabajo, se plantean y discuten posibles líneas de acción en la formación de los docentes, que permitan hacer consciente la configuración de estos patrones en la clase, y las consecuencias en cuanto a los significados que se negocian en la clase, cuando los mismos se vuelven estereotipados.

Referencias

Adda, J. (1987). *Elementos de didáctica de las matemáticas*. (Trad. Arreguin G. y Olvera, M.) Sección de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN. México.

Cobb, P.; Bauersfeld, H. (eds.) (1995). *The emergence of Mathematical Meaning: Interaction in Classroom Cultures*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Bauersfeld, H.; Krummheuer, G. y Voigt, J. (1985). Interactional Theory of Learning and Teaching Mathematics and Related Microetnographical Studies. En Steiner, H.- G: *Proceedings of the TME 1985*. Bielefeld: IDM.

Cobb, P.; Bauersfeld, H. (1995). The Coordination of Psychological and Sociological Perspectives in Mathematics Education. En Bauersfeld, H.; Cobb, P. (eds.). *The emergence of MathematicalMeaning: Interaction in Classroom Cultures.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Cobb, P.; Wood, T. y Yackel, E. (1993). Discourse, Mathematical Thinking and Classroom Practice. En Forman, E., Minick, N. y Stone, C. (Eds). *Contexts for Learning Sociocultural Dynamics in Children's Development.* New York: Oxford University Press.

Consejo de Formación en Educación. Disponible en http://www.cfe.edu.uy/index.php/planes-y-programas/planes-vigentes-para-profesorado/44-planes-y-programas/profesorado-2008/380-matematica

Cubero, M.; Cubero, R.; de la Mata, M.; Ignacio-Carmona, M.; Prados, M. y Santamaría, A. (2008). La educación a través de su discurso. Prácticas educativas y construcción discursiva del conocimiento en el aula. *Revista de Educación*. (364), mayo-agosto, pp. 71-104.

Charnay, R. (1988). Aprender (por medio de) la resolución de problemas. En *Didáctica de Matemáticas. Aportes y reflexiones.* Cecilia Parra e Irma Saiz (Compiladoras) (1995). Paidós Educador.

Chevallard, Y. (1997). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* AIQUE, Buenos Aires.

Eisenhart, M. (1988). The Ethnographic Research Tradition and Mathematics Education Research. *Journal for Research in Mathematics Education.* 19(2), pp. 99-114.

Godino, J.; Llinares, S. (2000). El interaccionismo simbólico en Educación Matemática. *Educación Matemática.* 12 (1). 70-92.

Olave, M. (2013). Modelos de profesores formadores de matemáticas: ¿Cuáles son y en qué medida se transmiten a los futuros docentes? Un estudio de caso. (Tesis de doctorado no publicada). CICATA, del Instituto Politécnico Nacional, México. Disponible en http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/doctorado/olave_2013.pdf

Richards, J. (1991). Mathematical discussions. In E. von Glasersferd (ed.). *Constructivism in Mathematics Education.* (pp. 13-52). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

Sierpinska, A. y Lerman, S. (1996). Epistemologies of mathematics and of mathematics education. En A. J. Bishop, M.A. (Ken) Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde (Eds.). *International Handbook of Mathematics Education.* 1, 827- 876. Dordrecht, HL: Kluwer, A. P.

Sierpinska, A. (1998). Three Epistemologies, Three Views of Classroom Communication: Constructivism, Sociocultural Approaches, Interactionism. En Steinbring, H; Bartolini, M; Sierpinska, A. (eds.), *Language and Communication in the Mathematics Classroom.* National Council of Teachers of Mathematics. Boston, Virginia.

Sistema Único Nacional de Formación Docente (SUNFD). Plan Nacional Integrado de Formación Docente (2008). Disponible en http://www.cfe.edu.uy/images/stories/pdfs/plan_nacional/sundf_2008.pdf

Stephan, M. y Cobb, P. (2003). The methodological approach to classroom-based research. En Stephan, M; Bowers, J y Cobb. P (Eds). *Supporting Students' development of measuring conceptions: Analyzing students' learning in social context.* Journal for Research in Mathematics Education Monograph Nº 12 (pp.36-50). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Steinbring, H. (2005). *The construction of new mathematical knowledge in classroom interaction—an epistemological perspective.* Berlin: Springer.

Voigt, K. (1989). The Social Constitution of the Mathematical Province – A Microethnographical Study in Classroom Interaction. *The Quaterly Newsletter of the Laboratory of Comparative Human Cognition.* 11(1&2). 27-33.

Voigt, J. (1995). Thematic patterns of Interaction and Sociomathematical Norms. En Bauersfeld, H.; Cobb, P. (eds.), *The emergence of Mathematical Meaning: Interaction in Classroom Cultures.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Wood, T. (1994). Patterns of Interaction and the culture of Mathematics Classrooms. Cultural Perspectives on the Mathematics Classrooms. *Mathematics Education Library*, 14, 149 – 168.

Wood, T. (1995). An emerging practice of teaching. En Bauersfeld, H.; Cobb, P. (eds.). *The emergence of Mathematical Meaning: Interaction in Classroom Cultures.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Yackel, E. (2000). *Creating a Mathematics Classroom Environment that Fosters the Development of Mathematical Argumentation.* Paper prepared for Working Group 1: Mathematics Education in Pre and Primary School, of the Ninth International Congress of Mathematical Education, July 31-August 6, 2000, Tokyo/Makuhari, Japan. Recuperado de http://www.nku.edu/~sheffield/eyackel.html

Análisis Del Contenido Matemático En La Creación De Una Propuesta Didáctica Desde Los Procesos Reflexivos En Un Curso De Formación Continua.

Carlos Corrial Ayala, Elisabeth Ramos Rodriguez
Pontificia Universidad Católica De Valparaíso
carlos.corrial.a@gmail.com, elisabeth.ramos@pucv.cl

Resumen

El escrito a presentar se enfoca en los procesos reflexivos surgidos en un grupo de docentes participantes de un curso de perfeccionamiento profesional. Este curso, llamado "Didáctica de la matemática, teoría y práctica desde la reflexión docente" dirigido por dos profesoras de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, tuvo por objetivo fortalecer la práctica docente a partir de la reflexión sobre la práctica (Schön, 1983).

La investigación, de corte cualitativo, se centra en los procesos reflexivos de un grupo de profesores noveles respecto de la creación de una propuesta didáctica para determinar la ecuación cartesiana de la circunferencia. El proceso de creación de la propuesta fue analizado desde el modelo cíclico reflexivo ALaCT (Korthagen, 1987) respecto de las tareas planteadas por los docentes en función problemática. El análisis realizado fue llevado a cabo revisando la evolución de cómo los docentes abordan el contenido en la tarea, contrastando una situación inicial versus una final, y como los docentes reformulan esto en diferentes ciclos reflexivos.

Palabras Claves: reflexión sobre la práctica, docentes noveles, educación continua, ecuación de la circunferencia,

Introducción

El curso de perfeccionamiento, realizado la primera semana de enero del 2015, tuvo por dinámica el trabajo colaborativo centrado en la creación de una propuesta didáctica, que pretende abordar una problemática identificada internamente por los grupos. Esta investigación se centra en como los docentes desde una propuestas inicial, son capaces de reformularla y perfeccionarla, también se centra en identificar los momentos que gatillan estos procesos. La problemática seleccionada por los docentes fue ¿cómo tener una clase basada en la resolución de problemas para deducir la representación algebraica de una circunferencia?

Este reporte de investigación observara los procesos reflexivos de los docentes, identificando como estos ciclos afectan la propuesta original y como logran ser un agente depurador de la propuesta final. Este estudio está centrado en el análisis de la evolución de cómo los docentes abordan el contenido matemático en su propuesta.

Marco de Referencia

El marco de referencia se basa en el proceso reflexivo ALACT y el contenido.

Dentro de los modelos utilizados en educación matemática, hemos seleccionado uno que se basa en el modelo cíclico de reflexión de Kolb, desde la psicología cognitiva (Korthagen y Verkuyl, 1987). Nos referimos al modelo reflexivo *ALaCT* de Korthagen. Korthagen describe el proceso destinado al aprendizaje reflexivo, al que denomina proceso *ALaCT*, como un proceso cíclico en el que se pueden distinguir cinco etapas o fases.

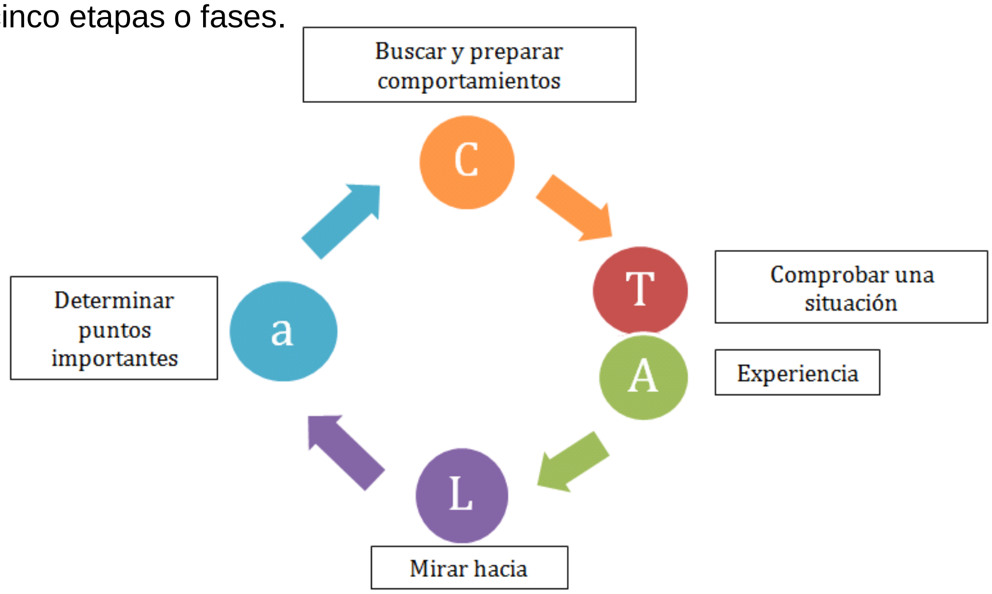


Figura 1. Modelo *ALaCT* (Korthagen et al., 2001)

Metodología

El estudio realizado es de corte cualitativo (Hernández, Fernández y Baptista, 2010). La riqueza de este tipo de estudio está en la visualización de eventos que generan e inician los procesos reflexivos y que a su vez estos son interpretables. El curso, enfrenta a los profesores participantes a la visualización de una problemática vivida por ellos en sus aulas o desde la teorización, ya que muchos de ellos son profesores noveles (con menos de 5 años de ejercicio docente). De este problema seleccionado por los docentes, estos son invitados a realizar y proponer una situación con orientaciones didáctica para abordar la problemática encontrada. Con este foco de trabajo los profesores mediante diversos procesos de reflexión y reformulación, son guiados a obtener un producto limpio y con enfoques de problema abierto. Los informantes son profesores de matemática que participaron del curso de perfeccionamiento.

Los se extraen de diversas fuentes: portafolio, presentaciones, exposiciones con apoyo de diapositivas, una bitácora de reflexione, discusiones grupales, previa a las exposiciones, registradas en audio, planes de clases. El método de análisis es el análisis de contenido (Krippendorff, 1990). La categoría de análisis es: Contenido matemático.

Análisis

Una de las situaciones importantes a considerar al analizar un proceso reflexivo, en este caso de investigación: los docentes; está en entender que el discurso realizado por los informantes, no siempre se expresan las ideas en el orden que sucedieron los hechos o las instancias que gatillan las reflexiones planteadas por el ciclo ALaCT (Korthagen, 1985).

La recogida de dato fue en función de las transcripciones de las exposiciones orales que realizaron los equipos de docentes al grupo de pares participantes del curso. El equipo docente investigado fue retroalimentado, por pares y profesores guías, en función de la presentación de la propuesta didáctica generada. De esta manera es que se pudieron evidenciar los ciclos reflexivos, para análisis de la evolución del contenido en particular, se visualizaron dos ciclos completos.

Primer Ciclo Reflexivo

Dentro de los registros generados por las exposiciones de los docentes, en cómo ellos generaron la propuesta didáctica, ellos exponen a sus pares la voluntad de trabajar respecto de las cónicas desde la resolución de problemas (tercera fase ALaCT), ya que consideran que son los puntos importantes y esenciales para abordar el contenido a enseñar a estudiantes de 17 años de la educación secundaria chilena (tercero medio) en su plan diferenciado de matemáticas. Presentada la idea de abordar las cónicas el grupo de pares considera que es un concepto demasiado amplio y que deben centrarse solo en una cónica y definir cómo es que afrontarán esta. Son estas las retroalimentaciones que producen en los docentes, la necesidad de centrarse solamente en una, y ellos deciden: la circunferencia (cuarta fase ALaCT).Con esta especificación de la propuesta, esta queda está orientada en: Descubrir la representación algebraica de la circunferencia (quinta fase ALaCT).

El proceso presentado nos muestras las tres últimas fases de un ciclo reflexivo, pero es más adelante, donde los informantes revelan que el contenido elegido responde a una experiencia laboral de uno de los docentes del equipo, que al tratar de enseñar el contenido asociado a la circunferencia en su forma analítica, los estudiantes no respondieron como estaba planificado a la actividad y fueron los mismos estudiantes los que solicitaron al docente, que les enseñará la fórmula sin el proceso de entender cómo esta se obtenía, el docente definió la situación como que “los estudiantes no querían pensar, solo calcular” (primera fase ALaCT) es este suceso el que motiva todo el ciclo reflexivo. Con el suceso definido el equipo se dedico, de forma natural, entre ellos delimitar cuales fueron los eventos que dieron forma a este suceso y pudieron rescatar y concluir que el contenido fue enseñado desde un ejercicio descontextualizado, los estudiantes no presentaron la motivación suficiente, ya que el ejercicio no presentaba un desafío intrínseco, solo responder a una pregunta del docente (segunda fase ALaCT).

Este ciclo reflexivo completo es el primero al que se enfrento el equipo de docentes, y logró en esta primera instancia pasar de una experiencia laboral a la problematización del evento, fundamentando está en la búsqueda de los elementos que la caracterizaron.

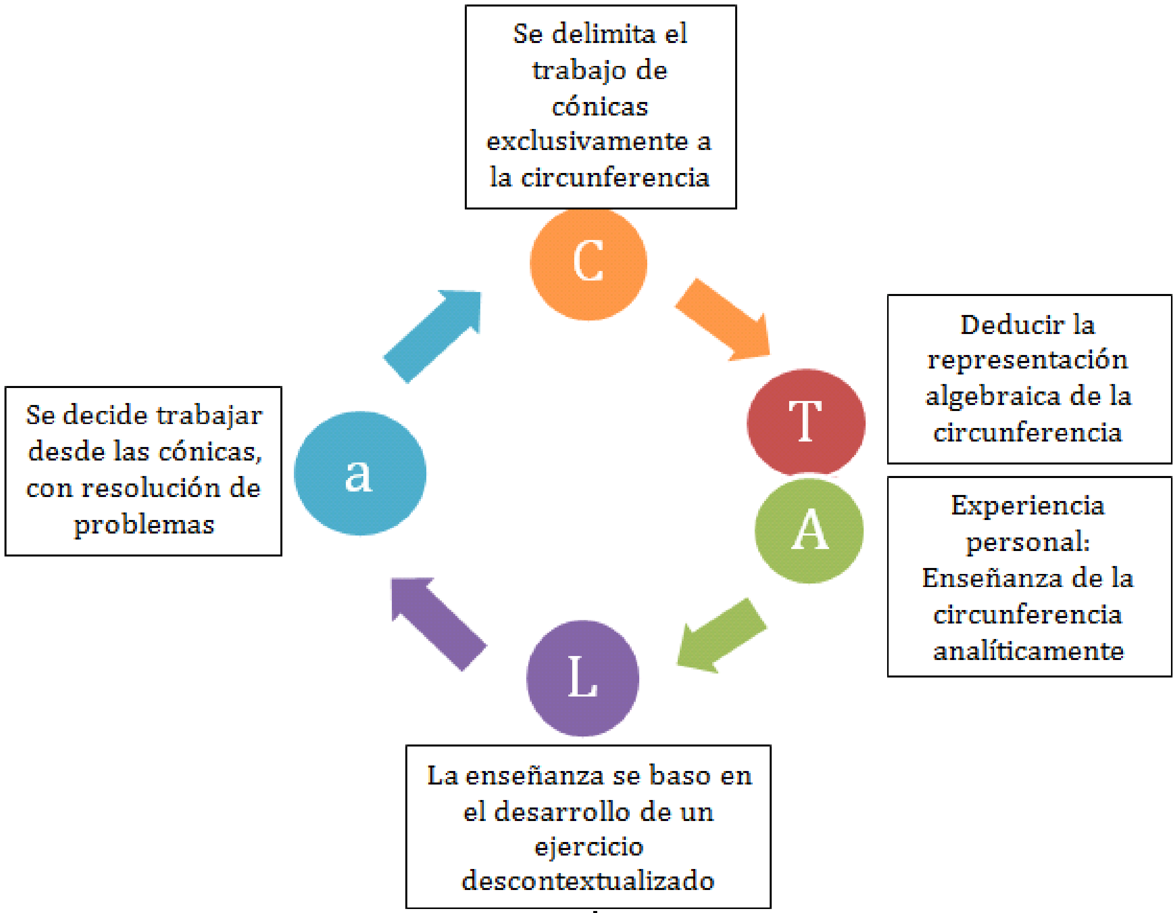


Figura 2. Modelo *ALaCT* primer ciclo reflexivo

El producto de este primer ciclo reflexivo se transforma en el inicio de un nuevo ciclo.

Segundo Ciclo Reflexivo

Este segundo ciclo reflexivo está marcado por la linealidad de las fases ALaCT en relación con el discurso de los docentes. Ya definida la acción (primera fase ALaCT) como resultado o Trial del proceso reflexivo anterior (quinta fase ALaCT), los docentes se ven en la necesidad de armar y definir los elementos que requieren que aparezcan en el plan de clases y que son necesarios para que los estudiantes logren deducir la representación algebraica de la circunferencia en esta propuesta didáctica.

Es así como la necesidad de contexto, resultado de la reflexión del ciclo anterior, surge como una solución que permite lograr la atracción de los estudiantes al problema y sacarlo de la matemática descontextualizada y pasar a la matematización de una realidad. Este enfoque permite utilizar la matemática como herramienta para solucionar un problema cotidiano, logrando involucrar al estudiante en la búsqueda de una respuesta a la secuencia de preguntas de la propuesta (segunda fase ALaCT). Dentro de estas respuestas esperadas por los docentes está, poder desarrollar en los estudiantes, que descubran “que cada una de las coordenadas al cuadrado sumadas tienen que ser guales a la distancia al cuadrado”, los docentes buscan esbozar una imagen de lo que se espera de la actividad, pero el salto cognitivo presente, desde el problema planteado a este nivel de respuesta, está fuera del alcance de los estudiantes, ya que la propuesta no cimienta pasos intermedios para alcanzar esta respuesta. Una de las retroalimentaciones ante esta situación o delimitación de la propuesta, es que no es natural para los estudiantes encuentren expresiones algebraicas, por lo que la secuencia de preguntas no permite lograr este salto cognitivo acertadamente.

La toma de conciencia respecto a la secuencia de preguntas, permite que los docentes decidan reorientar el logro de este objetivo, abordándolo primero desde una actividad que permita emerger la definición de distancia euclidiana (tercera fase ALaCT). Este punto focaliza la atención en aspectos fundamentales que permiten la construcción del objetivo, por lo que los docentes revisan nuevamente la propuesta.

Una retroalimentación posterior, nuevamente respecto del enfoque de las preguntas, permite reorientar “lo que se busca” con estas preguntas. El cuestionamiento en concreto era, que las preguntas planteadas en la propuesta podían ser respondidas sencillamente utilizando el teorema de Pitágoras, al generar los triángulos rectángulos asociados, y no generar la necesidad de que aparezca la distancia euclidiana, que es el objetivo buscado. Por lo que el cuestionamiento nuevamente invita a los docentes a reformular las preguntas y orientarlas a lo que se espera lograr, por lo que nace la necesidad de buscar comportamientos alternativos para lograr el objetivo (cuarta fase ALaCT).

Todas las retroalimentaciones realizadas al equipo docente, por parte del grupo de pares y de las profesoras guías, fueron tomadas, implementadas y estas permitieron la reformulación de la propuesta original, logrando un producto, claro y conciso, que presenta un objeto matemático definido y abordado desde un proceso constructivo. Lo que permitió generar una propuesta didáctica con el objetivo ¿Cómo gestionar una clase basada en la resolución de problemas para deducir la ecuación cartesiana de la circunferencia? (quinta fase ALaCT)

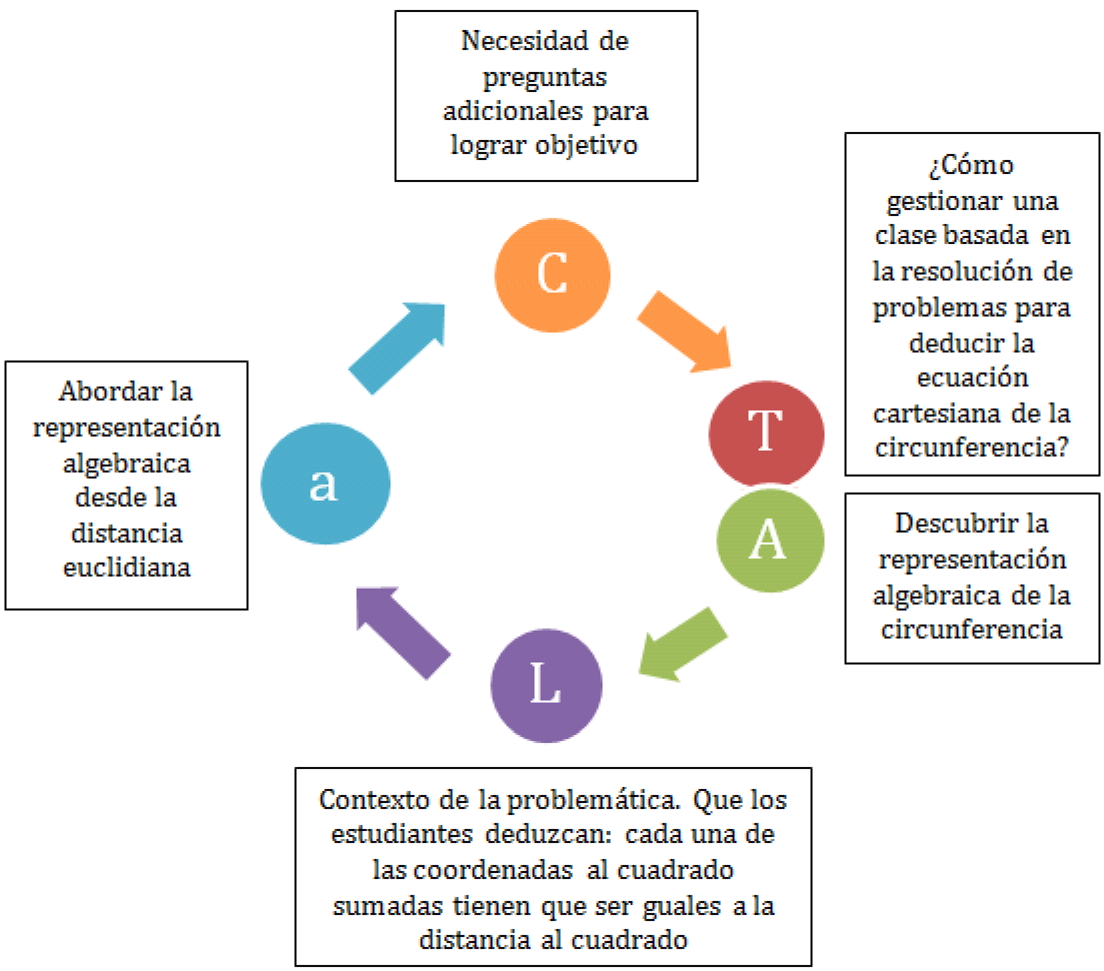


Figura 3. Modelo *ALaCT* segundo ciclo reflexivo

El proceso reflexivo doble, muestra la maduración en el manejo de cómo lograr la construcción de un objeto matemático y como los docentes son capaces de reflexionar para lograr un producto limpio y que sea acertado al objetivo a conseguir. El proceso doble, mostro como los docentes seleccionan el contenido y lo limpian y un segundo ciclo como lo maduran para entregar una propuesta completa.

Conclusiones

El análisis realizado muestra como los procesos reflexivos generan cambios significativos en los enfoques que posee una propuesta y como esta favorece el producto final. Así también como la delimitación del contenido permite abordar de mejor forma la problemática.

Se observa la importancia del trabajo colaborativo a la hora de evaluar una propuesta, ya que son instancias como la exposición, el debate y la retroalimantación las que generan cambios en los enfoques de una propuesta y las que permiten modificarla. Las fases del proceso ALaCT se pudieron evidenciar, no tan fácilmente en orden, pero de manera completa y en un proceso doble.

Referencias

Hernández, R., Fernández C. y Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación*. México: McGraw-Hill.

Korthagen, F.A..J. (1985). Reflective Teaching and Preservice Teacher Education in the Netherlands. *Journal of Teacher Education, 36(5), 11-15.*

Korthagen, F.A.J. y Verkuyl, H. S. (1987). *Supply and Demand: Towards Differentiation in Teacher Education, Based on Differences in Learning Orientations.* Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, Washington. D.C.

Korthagen, F.A.J., Kessels, J., Koster, B., Lagerwerf, B. y Wubbels, T. (2001). *Linking practice and theory: The pedagogy of realistic teacher education*. Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.

Krippendorff, K. (1990). *Metodología de análisis de contenido: teoría y práctica*. Barcelona: Paidós.

Schön, D. (1983). *La formación de profesionales reflexivos: Hacia un nuevo diseño de la enseñanza y el aprendizaje en las profesiones.* Madrid: Paidós.

Una Revisión Alrededor De Inferencia Informal

Nicolás Sánchez, María Guadalupe Tobías Lara, Blanca Ruiz Hernández
nicolas1983@gmail.com, mgtl@itesm.mx, bruiz@itesm.mx,
CICATA-IPN, Tecnológico de Monterrey, Tecnológico de Monterrey

Resumen

Este trabajo se enmarca dentro de la línea de didáctica de la estadística. Se parte de la necesidad de encontrar elementos que permitan fomentar un razonamiento estadístico en la enseñanza formal y relacionar con conceptos que son tratados de manera aislada. De esta forma se posibilita la pertinencia de situar la inferencia desde una perspectiva informal e intuitiva. Se discuten enfoques alternativos de inferencia que han sido desarrollados por diversos autores que permiten responder cuestiones surgidas en el desarrollo de este marco. Se presentan a modo de ejemplo algunas actividades que han sido implementadas y evaluadas en diversos cursos para desarrollar ideas de inferencia informal. Finalmente se discute la relevancia de la inferencia informal para la construcción de mecanismos formales de inferencia.

Palabras clave: razonamiento estadístico, inferencia informal, análisis de datos.

Introducción

A finales del siglo XX se puso de manifiesto la necesidad de fomentar el razonamiento estadístico en la enseñanza escolarizada para contrastar la enseñanza de conceptos aislados. Wild y Pfannkuch (1999) propusieron un marco en el que desglosaron el pensamiento estadístico como un ente complejo de conceptos interrelacionados entre sí que se veían influidos por varias formas de razonamientos. Esto sólo fue el inicio para dar lugar, en la primera década del segundo milenio, a una propuesta didáctica que pretendía fomentar razonamiento estadístico en los estudiantes desde la introducción de estadística descriptiva.

Una de las propuestas que la investigación en didáctica de la estadística ha abalado más fuertemente es la introducción del razonamiento sobre inferencia informal como una forma de dar sentido a los conceptos previos a inferencia y preparar al estudiante para el razonamiento de inferencia formal. También se ha sugerido que introducir actividades de inferencia informal en etapas tempranas de un curso introductorio establece las bases para el razonamiento de inferencia (Garfield, Zieffler y Ben-Zvi, 2014). A este respecto Makar y Rubin (2009) mencionan que:

“aunque la enseñanza de inferencia informal soporta el entendimiento conceptual de procesos de inferencia formal que se verán posteriormente, el objetivo no es necesariamente preparar al estudiante para hacer inferencia estadística formal. Nosotros vemos el potencial de la inferencia informal en profundizar la compresión en los estudiantes sobre el propósito y utilidad de los datos más generalmente con directa aplicabilidad a construir significado de su mundo” (p. 85).

Makar (2013) menciona que la inferencia informal puede ayudar a los estudiantes a apreciar la utilidad de la estadística en su vida diaria y su futura vida profesional. Así, desarrollar razonamiento de inferencia informal tiene un doble objetivo, a corto y a largo plazo. De manera tal que un estudiante le ve sentido al conocimiento en su momento a la vez que se le da la oportunidad de retomarlo en futuros cursos.

El propósito de este escrito es dar a conocer aquellos componentes esenciales para desarrollar un razonamiento inferencial informal. Esto permitirá sentar bases para exponer algunos marcos referenciales que explican aspectos teóricos de la inferencia informal y tomar en cuenta las dificultades que ha dado origen a dichos marcos. Se finaliza el trabajo con la presentación de actividades desarrolladas en algunas investigaciones y sus respectivas recomendaciones, para concluir con algunas recomendaciones generales al respecto.

INFERENCIA INFORMAL Y RAZONAMIENTO INFERENCIAL INFORMAL, ¿QUÉ SON?

Primeramente, es importante conocer que se entiende por inferencia informal y por razonamiento de inferencia informal.

2.1. Inferencia Informal

Dado su énfasis, la inferencia informal está vinculada con un carácter discursivo. Ben-Zvi (2006) plantea que las inferencias informales se relacionan con las actividades argumentativas. Así mismo, la extrapolación de conclusiones tomadas de los datos, ya sea, de manera formal o informal está acompañada por la necesidad de proporcionar argumentos convincentes basados en el análisis de datos. Al respecto Pfannkuch (2006) describe la inferencia informal como la obtención de conclusiones a partir de datos obtenidos al observar, comparar y razonar a partir de las distribuciones de los datos. Para Rossman (2008) la inferencia informal es considerada como el elemento fundamental de la inferencia, pues permite ir más allá de los datos, además propone que la inferencia se debe basar en un modelo de probabilidad específico.

2.2. Razonamiento De Inferencia Informal

No existe una definición única de razonamiento de inferencia informal. Distintos investigadores la han abordado y cada uno de ellos ha dado su propia perspectiva.

Pfannkuch (2006), conceptualiza el razonamiento de inferencia informal como la habilidad de interconectar ideas de distribución, muestreo y centro dentro de un ciclo empírico de razonamiento. Para Ben-Zvi, Gil y Appel (2007) este tipo de razonamiento se asocia a las actividades cognitivas involucradas al hacer informalmente inferencias con datos de muestras acerca de un universo más grande o población, considerando las limitaciones y fortalezas del muestreo. En la misma idea de la argumentación Zieffler, Garfield, Delmas y Reading (2008) plantean que el razonamiento de inferencia informal es la forma en que los estudiantes usan su conocimiento informal para elaborar argumentos que sustenten estas inferencias acerca de poblaciones desconocidas basadas en muestras observadas. Ellos ven al razonamiento de inferencia informal como un proceso que incluye:

- El razonamiento acerca de las características de una población basada en una muestra (forma, medidas de centralización, etc).
- El razonamiento acerca de las posibles diferencias entre dos poblaciones basadas en las diferencias entre dos muestras.
- El razonamiento acerca de lo probable o sorpresiva que puede ser una muestra, considerando una esperanza particular o enunciado dado.

Asociar el razonamiento informal a situaciones contextualizadas cobra relevancia al implementar propuestas de aprendizaje en las que se enfatiza el análisis de datos. Al respecto Pfannkuch (2005) menciona que se debe relacionar el razonamiento de inferencia informal con el planteamiento de situaciones que obliguen al alumno a razonar informalmente. Esta idea la complementa Rubin, Hammerman y Konold (2006) al relacionar el razonamiento de inferencia informal con el razonamiento sobre ideas y sus relaciones (centro, variabilidad, tamaño de muestra y sesgo).

Todos ellos coinciden en que el razonamiento informal favorece la vinculación profunda de los conceptos estadísticos y de éstos con el mundo que los rodea.

Marcos teóricos sobre razonamiento de inferencia informal

En la literatura existen varios marcos para estudiar el razonamiento de inferencia informal. Uno de estos marcos es el planteado por Zieffler et al. (2008), quienes proponen analizar tres componentes del razonamiento de inferencia informal:

i. los juicios, afirmaciones o predicciones basados en muestras sin usar procedimientos formales,
ii. la forma en que se integran los conocimientos previos disponibles y,
iii. la articulación de los argumentos para mostrar la evidencia para hacer juicios, afirmaciones o predicciones.

Por su parte Makkar y Rubin (2009) consideran la inferencia informal como proceso para aprender estadística. Este marco surge a la luz de trabajos en enseñanza primaria. Se distinguen tres componentes clave: (i) generalizar o predecir al observar más allá de los datos, (ii) el uso de los datos como evidencia y, (iii) emplear un lenguaje probabilístico al describir generalizaciones, incluyendo ideas informales en el grado de certeza de las conclusiones propuestas.

Estos componentes surgen al considerar algunos elementos claves que debiesen ser incluidos al realizar un razonamiento de inferencia informal:

- La noción de incertidumbre y variabilidad articulada a través del lenguaje
- La dependencia en el concepto de agregado (opuesto a puntos individuales) a través del uso de generalizaciones acerca del grupo
- El reconocimiento de un mecanismo o tendencia que se extienda más allá de los datos y,
- La evidencia para razonar, la que debe estar basada en el uso de los datos.

Años más tarde, Makar y Rubin (2014) retoman los tres componentes de su marco original para revisar investigaciones sobre razonamiento de inferencia informal, extendiendo al nivel secundario y superior. De estas revisiones se hace hincapié en inducir en niños, desde edades tempranas, a realizar inferencias informales y poder hacer predicciones y que se requieren más investigaciones para cimentar una base sólida para implementar desarrollar a nivel curricular.

La creencia de Pfannkuch (citada en Wild, Pfannkuch, Regar y Horton, 2010) de que la falta de apreciación de variabilidad del muestreo por parte de los estudiantes limita su razonamiento de inferencia informal ha motivado el trabajo con aplicaciones en páginas Web, simulaciones y remuestreo, con el fin de concientizar a los estudiantes sobre la variabilidad presente en el muestreo y el efecto que tiene el tamaño de la muestra en esta variabilidad.

El marco taxonómico el modelo SOLO (Structure of the Observed Learning Outcome) también permite analizar el razonamiento de inferencia informal, por ejemplo, los estudios de Nor y Idris (2010), Vallecillos y Verdejo (2003) e Insunza (2013) utilizan este modelo en una investigación sobre la comparación de dos diagramas de caja o sobre el contraste de hipótesis. Gil y Ben-Zvi (2011) caracterizan y clasifican el tipo de explicaciones en varios tipos: descriptiva, abductiva, razonable y resolución de conflicto. También dentro de los marcos que conceptualizan el razonamiento de inferencia informal se ha investigado la influencia del contexto al realizar inferencias en base a los datos (Makar, Bakker y Ben-Zvi 2011; Pfannkuch, 2011).

El desarrollo de este marco de trabajo, enfatiza elementos sustanciales a considerar como la importancia del contexto, la argumentación en las conclusiones, la variabilidad de la muestra, la incorporación de simulación, etc.

Dificultades en el razonamiento de inferencia informal

Variadas investigaciones sobre razonamiento de inferencia informal tienen su justificación en la las dificultades encontradas en el tratamiento de la inferencia formal. En muchos casos, esto se debe a que en los cursos escolares se enfatiza poco en la incorporación de razonamientos alrededor de la variabilidad de la muestra, diferenciación entre distribución de la muestra y muestral y a que se obtienen conclusiones sin considerar el contexto de donde se extraen los datos.

En un proyecto estadístico, Li y Shen (1992) muestran ejemplos de elección incorrecta del tipo de gráfico realizados por los estudiantes de secundaria. Algunos alumnos utilizaron un polígono de frecuencias con variables cualitativas, o un diagrama de barras horizontal para representar la evolución del índice de producción industrial a lo largo de una serie de años.

Años más tarde Vallecillos y Batanero (1997a) investigaron sobre las concepciones y errores que los alumnos encuentran al aprender contrastes de hipótesis. Una de sus conclusiones fue que los errores sobre el nivel de significancia están asociados a otros errores de conceptos relacionados con éste. Siguiendo esta misma línea, Batanero (2000) revisó la lógica de los contrastes de hipótesis y los errores frecuentes en los conceptos básicos, como nivel de significancia al ver la condicionalidad en su cálculo, concepción de las hipótesis, dada la tendencia en que los estudiantes a confundir la hipótesis de investigación con la hipótesis estadística, o confundir también hipótesis nula con hipótesis alternativa.

En García-Ríos (2013) se encontró que algunos errores cometidos por estudiantes radican principalmente en la imposibilidad que tiene de medir la significatividad del estadístico de la muestra adecuadamente. Esto se debe a dos posibles causas: i) a un razonamiento determinista, al momento de especificar cuándo rechazar o no la hipótesis, en el sentido de que el estadístico debe coincidir exactamente con el modelo de la población personal y b) al comparar el estadístico con un modelo probabilístico inapropiado de la población, creado por el estudiante con base en sus conocimientos.

Dentro de las causas que dificultan un razonamiento inferencial informal aparece la falta de experiencias con eventos estocásticos, los cuales forman la base de la inferencia estadística (Pfannkuch, 2005). También, otras razones que dan cuenta de las dificultades al razonar inferencialmente son: la lógica de la inferencia estadística, intolerancia de los estudiantes a la ambigüedad, y su incapacidad para reconocer la estructura subyacente de un problema. Lo anterior se debe principalmente a que la amplia mayoría de cursos estadísticos de la enseñanza formal se dedican al adiestramiento de los alumnos en cálculos, graficación y reglas mecánicas aisladas, carentes de significado y de contextos (García- Ríos, 2013).

Por otro lado Garfield y Ben-Zvi (2008) han sugerido que los estudiantes tienen una comprensión incompleta de los conceptos fundamentales, como la distribución, la variación, el muestreo, y las distribuciones de muestreo.

Muchos de las dificultades encontradas en el razonamiento inferencial están sujetas a las concepciones que los estudiantes tienen de dicho proceso. Al respecto Sotos, Vanhoof, Noortgate y Onghena (2007) muestran una revisión bibliográfica sobre las concepciones en inferencia estadística, las clasifican en tres: (i) distribuciones muestrales, (ii) pruebas de hipótesis e (iii) intervalos de confianza. Sobre el tema de pruebas de hipótesis, mencionan que enseñarlo es para los maestros de estadística un reto, por la persistencia y lo arraigado de esas malas interpretaciones en los estudiantes, aún después de años de entrenamiento en estadística (citan a Falk y Vallecillos).

Según Zieffler et al. (2008), las dificultades que tienen los estudiantes en el aprendizaje de inferencia estadística giran en torno a la falta de adaptación a la lógica del pensamiento estadístico, la intolerancia a la ambigüedad, la falta de habilidad para reconocer la estructura de un problema de inferencia, la comprensión incompleta que tienen de conceptos fundamentales involucrados, como la distribución, variación, muestreo y distribuciones muestrales.

Así mismo, Vallecillos (1999) recomienda que:

[para] disminuir las dificultades asociadas al aprendizaje de análisis de datos es necesario iniciar en la investigación experimental. Esta permite detectar los posibles problemas de enseñanza a todos los niveles. Sus resultados han de servir como base sólida para planificar la enseñanza y validarla científicamente con el fin de conseguir el mayor nivel de eficiencia para ella (p. 350).

A modo de resumen se rescata lo planteado por Arthur Bakker y Jan Derry en el SRTL del año 2009 mencionando:

el problema principal al que se enfrenta en el campo es la forma en que se enseña estadística, al ser tratada como conceptos aislados, tanto el uno del otro y del contexto de donde surgen los datos. Esta idea radica en que los conceptos son atomizados, lo que se contrasta con el enfoque holístico que se requiere para aprender a razonar estadísticamente (Makkar y Ben-Zvi, 2011, p. 2).

Propuestas de actividades de inferencia informal

En el desarrollo del razonamiento inferencial informal, la elaboración, implementación y evaluación de actividades debe ser rigurosa y cuidadosa. Estas actividades deben ser secuenciadas cuidadosamente a modo de poder explorar los modos de pensamiento y razonamiento que experimentan los estudiantes en proceso de análisis. Para ello se muestran algunas actividades que consideramos relevantes, con la intención de mostrar sus características, y no con esto desestimar otras que tiene igual o mayor potencial.

En Zieffler et al. (2008, citando a Bakker, 2004), se propone una tarea para estimar y desarrollar gráficos poblacionales basados en muestras con estudiantes de octavo grado. En ella se pidió a los estudiantes predecir un gráfico de pesos para una clase de 27 estudiantes y luego dibujar los gráficos durante tres clases, el cual tenía un total de 67 estudiantes, basado en pequeñas muestras aleatorias de pesos para estudiantes.

Después que se les mostró a los estudiantes los conjuntos de datos simulados por ordenador para los de 27 estudiantes y las tres clases juntos, se les pidió describir las diferencias entre sus dos gráficos y luego comparar éstos con los gráficos reales de los datos de peso. En la última parte de la actividad, se les pidió a los estudiantes que crearan gráficos para la población de todos los estudiantes en su ciudad por medio de conjuntos de puntos.

En otra investigación, Weinberg, Wiesner y Pfaff (2010) plantean una actividad en la que estudiantes investigan sobre las ganancias medias que se pueden obtener a través de un proceso de muestreo con reingreso. El propósito es determinar el punto de equilibrio en términos de lo que esperarían si se jugase repetidas veces. La manera de crear la lotería es que cada estudiante recibe una bolsa llena de ficha de bingo, donde cada color corresponde a un capital distinto de dólares. Las únicas disposiciones son que no se les permite mirar en la bolsa y que necesitan sacar fichas con reemplazo.

Algunas de las propuestas en la enseñanza de cursos introductorios son por ejemplo, la de Aliaga y Gunderson (2006), quienes plantean una estrategia radicalmente innovadora. Esta consiste en iniciar los cursos introductorios de estadística con los conceptos básicos de inferencia. Otra propuesta es la de Pannfkuch (2011) quién usa las comparaciones visuales para desarrollar el razonamiento inferencial en alumnos de cursos introductorios en universidad, se centra en distribuciones de las muestras.

Las exhortaciones que Cobb (1992) hacia a maestros de cursos introductorios sobre ayudar a desarrollar los elementos básicos de razonamiento estadístico son mencionadas en Garfield, Le, Zieffler y Ben-Zvi, (2014). Apoyando lo anterior, en GIASE Report, se recomienda que los maestros promuevan en sus estudiantes el desarrollo de pensamiento estadístico primeramente en el salón de clases haciéndoles preguntas inquisitivas sobre datos y encaminarlos a que tomen decisiones analíticas. Aunado a esto, Mckenzie y Goldman (2006) sugiere a los profesores de cursos introductorios centrarse más en los conceptos y no tanto en las definiciones, procedimientos y desarrollos computacionales.

El crear un ambiente que promueva el aprendizaje del razonamiento estadístico, se fundamenta en el enfoque constructivista del aprendizaje, unas recomendaciones para lograrlo son: centrarse en desarrollar las ideas centrales de estadística, usar datos reales y que motive a los alumnos, usar actividades en el salón que promueva el desarrollo del razonamiento estadístico, integrar el uso de la tecnología, promover el discurso en el salón de clase, usas alternativas de evaluación (Garfield y Ben-Zvi, 2009).

Reflexiones

Dada la revisión desarrollada, se hace necesario incorporar componentes que permitan dar cuenta del origen de los datos, así como comprender que estos no están sujetos a fenómenos deterministas, sino que están sujetos a la variabilidad, tamaño de muestra y formas de representación. De esta forma la inferencia informal emerge como un marco que permitiría dar respuesta a los procesos de enseñanza y aprendizaje en la educación formal.

Por una parte los profesores tendrían una herramienta a considerar en el desarrollo e implementación de actividades en cursos de estadística y su actividad de aula, por otro, los estudiantes lograrían comprender todos aquellos fenómenos que están presentes al realizar inferencias y lograr ir más allá de lo que muestran los datos.

Se torna un desafío para los profesores, aprehender y conocer el marco inferencial informal como una vía alternativa de enseñanza. Se hace necesario que se incorporen en los diversos niveles educativos, todos aquellos elementos que han sido considerado en diversos estudios y han mostrado resultados alentadores en este aspecto, al relevar la importancia del contexto, la variabilidad de las muestras, el cuidado al plantear hipótesis, la incorporación de la probabilidad como parte integrante de la inferencia, las conclusiones generales y no locales, el uso de simulación, etc. Para ello se debe potenciar una visión y educación estadística en profesores y estudiantes como parte integrante del quehacer cotidiano, pero por sobre todo como una herramienta útil para desenvolverse en el medio.

Referencias bibliográficas

Alliaga, M. y Gunderson, B. (2006). *Interactive Statistics* (3ª ed). New Jersey: Pearson

Batanero, C. (2000). Controversias sobre el papel de los contrastes estadísticos de hipótesis en la investigación experimental. *Mathematical Thinking and Learning*, 2(1-2), 75-98.

Ben-Zvi, D., Gil, E., y Apel, N. (2007). What is hidden beyond the data? Young students reason and argue about some wider universe. En D. Pratt y J. Ainley (Eds.), Reasoning about Informal Inferential Statistical Reasoning: A collection of current research studies. *Proceedings of the Fifth International Research Forum on Statistical Reasoning, Thinking, and Literacy*, 5 (SRTL-5).

Recuperado el 24 de agosto de http://www.academia.edu/976856/What_is_hidden_beyond_the_data_Helping_young_students_to_reason_and_argue_about_some_wider_universe

Ben-Zvi, D. (2006). Scaffolding students' informal inference and argumentation. En A. Rossman y B. Chance (Eds). *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*. Recuperado el 23 de Agosto de 2015 de: http://iase-web.org/Conference_Proceedings.php?p=ICOTS_7_2006

Garfield, J., Le, L., Zieffler, A., & Ben-Zvi, D. (2014). Developing students' reasoning about samples and sampling variability as a path to expert statistical thinking. *Educational Studies in Mathematics*, 1-16.

Garfield, J., y Ben-Zvi, D. (2008). *Developing students' statistical reasoning: Connecting research and teaching practice*. Dordrecht: Springer.

Garfield, J., y Ben-Zvi, D. (2009). Helping students develop statistical reasoning: Implementing a statistical reasoning learning environment. *Teaching Statistics*, 31(3), 72-77.

García-Ríos, V. (2013). Inferencias estadísticas informales en estudiantes Mexicanos. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria, 1,* 343-357.

Garfield, J., Le, L., Zieffler, A.,y Ben-Zvi, D. (2014). Developing students' reasoning about samples and sampling variability as a path to expert statistical thinking*.* *Educational Studies in Mathematics*, 1-16.

Gil, E., y Ben-Zvi, D. (2011). Explanations and context in the emergence of students' informal inferential reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*, 13(12), 87-108.

Insunza, S. (2013). Un acercamiento informal a la inferencia estadística mediante un ambiente computacional con estudiantes de bachillerato. *Revista Electrónica AMIUTEM*, 1 (1), 60-75.

Li, K. Y., y Shen, S. M. (1992). Students' weaknesses in statistical projects. *Teaching Statistics*, 14(1), 2-8.

Makar, K., y Rubin, A. (2009). A framework for thinking about informal statistical inference. *Statistics Education Research Journal*, 8(1), 82-105.

Makar, K., Bakker, A., y Ben-Zvi, D. (2011). The reasoning behind informal statistical inference. *Mathematical Thinking and Learning*, 13(1-2), 152-173.

Makar, K., y Ben-Zvi, D. (2011). The role of context in developing reasoning about informal statistical inference. *Mathematical Thinking and Learning*, 13(1-2), 1-4.

Makar, K. (2013). Predict! Teaching statistics using informal statistical inference. *Australian Mathematics Teacher*, 69(4), 34.

Makar, K., y Rubin, A. (2014). Informal statistical inference revisited. En K. Makar, B. de Sousa, R. Gould (Eds) *Proceedings of the Ninth International Conference on Teaching Statistics*. Recuperado el 23 de Agosto de 2015 de: http://iase-web.org/Conference_Proceedings.php?p=ICOTS_9_2014

McKenzie, J., & Goldman, R. (2006). Questions to assess the understanding of statistical concepts. En A. Rossman y B. Chance (Eds). *Working cooperatively in statistics education: Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*. Recuperado el 23 de Agosto de 2015 de: http://iase-web.org/Conference_Proceedings.php?p=ICOTS_7_2006

Nor, N. M., y Idris, N. (2010). Assessing Students' Informal Inferential Reasoning using SOLO Taxonomy based Framework. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 2(2), 4805-4809.

Pfannkuch, M. (2005). Probability and statistical inference: How can teachers enable learners to make the connection? In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 267-294). New York: Springer.

Pfannkuch, M. (2006). Informal inferential reasoning. En A. Rossman y B. Chance (Eds). *Working cooperatively in statistics education: Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*. Recuperado el 23 de Agosto de 2015 de: http://iase-web.org/Conference_Proceedings.php?p=ICOTS_7_2006

Pfannkuch, M. (2011). The role of context in developing informal statistical inferential reasoning: A classroom study. *Mathematical Thinking and Learning*, 13(1-2), 27-46.

Rossman, A. (2008). Reasoning about informal statistical inference: One statistician's view. *Statistics Education Research Journal*, 7(2), 5-19.

Rubin, A., Hammerman, J., and Konold, C. (2006). Exploring informal inference with interactive visualization software. In A. Rossman and B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*, Salvador, Brazil. Voorburg: The Netherlands: International Statistical Institute.

Sotos, A. E. C., Vanhoof, S., Van den Noortgate, W., & Onghena, P. (2007). Students' misconceptions of statistical inference: A review of the empirical evidence from research on statistics education. *Educational Research Review*, 2(2), 98-113.

Vallecillos, A. (1999). Some empirical evidence on learning difficulties about testing hypotheses. *Bulletin of the International Statistical Institute: Proceedings of the Fifty-Second Session of the International Statistical Institute*, 52, 201-204.

Vallecillos, A., y Batanero, C. (1997a). Aprendizaje y enseñanza del contraste de hipótesis: concepciones y errores. *Enseñanza de las Ciencias*, 15, 189-197.

Vallecilos, A., y Verdejo, A. (2003). Esquema para la instrucción y evaluación del razonamiento en estadística inferencial elemental. *Revista Educación y Pedagogía*, 15(35), 69-81.

Weinberg, A., Wiesner, E., & Pfaff, T. (2010). Using informal inferential reasoning to develop formal concepts: Analyzing an Activity. *Journal of Statistics Educatio*n, 18(2). Recuperado el 24 de agosto de 2015 de: http://www.amstat.org/publications/jse/jse_archive.htm#2010

Wild, C. J., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review, 67*(3), 223–265.

Wild, C. J., Pfannkuch, M., Regan, M., y Horton, N. J. (2010). Inferential reasoning: Learning to "make a call" in theory. En C. Reading (Ed.), *Data and context in statistics education: Towards an evidence-based society. Proceedings of the Eighth International Conference on Teaching Statistic*s. Recuperado el 23 de agosto de 2015 de: http://iase-web.org/Conference_Proceedings.php?p=ICOTS_8_2010

Zieffler, A., Garfield, J., Delmas, R., & Reading, C. (2008). A framework to support research on informal inferential reasoning. *Statistics Education Research Journal*, 7(2), 40-58.

Los Factores Afectivos En Matemática Educativa. Experiencias Emocionales De Profesores De Matemática En Servicio.

Gustavo Martínez Sierra, Patricia Eva Bozzano
CICATA – IPN, Liceo "Víctor Mercante"-Universidad Nacional de La Plata

Resumen

En este trabajo nos proponemos explorar uno de los ejes pertenecientes al campo de investigación **factores afectivos y pensamiento matemático: las emociones.**

Dado el carácter cualitativo de los factores afectivos, son en gran número los reportes de investigaciones de dato cualitativo los que han surgido. Así, muchos estudios en el campo de la Matemática Educativa se dedican a la identificación de experiencias emocionales y el papel que juegan en el pensamiento matemático en estudiantes sobre todo en actividades de resolución de problemas (Adams & McLeod 1989; Corte, Depaepe, Op't Eynde, & Verschaffel 2011; DeBellis & Goldin 2006; Goldin 2000; Goldin, Epstein, Schorr, & Warner 2011; Mandler 1989; Op't Eynde, Corte & Verschaffel 2006; Schoenfeld1985).

Posicionándonos desde los lineamientos provistos por la Matemática Educativa (ME) es que subyace en nuestro trabajo y sus objetivos principios como los que ha conducido al cuerpo teórico de la ME a admitir que cada una de las diferentes variables afectivas se encuentra interrelacionadas dialécticamente dado que existe algún grado de acuerdo entre los distintos enfoques de Matemática Educativa en donde la repetición de experiencias emocionales en contexto de enseñanza/aprendizaje de la Matemática puede ser la base para actitudes hacia la Matemática y creencias en torno a la actividad Matemática.

Nuestra intención es centrarnos en las experiencias emocionales de profesores de Matemática en actividad.

Como marco teórico para realizar el correspondiente análisis de los datos reunidos nos apoyamos en la Teoría Cognitiva de las Emociones de Ortony, Clore y Collins (1996).

Palabras claves: pensamiento matemático-emociones-profesores

La didáctica y su problemática ampliada

La consolidación de la didáctica de la matemática, tal y como se la conoce hoy en día, ha tomado años de discusiones, acuerdos y desacuerdos, posturas y puntos de vista.

Desde los inicios, la didáctica de la matemática poseía una visión mágica en el cual la enseñanza de la matemática era considerada algo así como un arte, el aprendizaje dependía sólo del grado en que el profesor dominaba dicho arte y de la voluntad y la capacidad de los alumnos para dejarse moldear por el artista (Gascón, 1998).

Esta visión fue evolucionando gracias al interés por entender y explicar los hechos didácticos, "considerando el aprendizaje como un proceso psico-cognitivo fuertemente influenciado por factores **motivacionales**, **afectivos** y **sociales"** (Gascón, 1998, p. 3).

Así, varios son los autores que con esta interpretación del aprendizaje humano han dado forma con sus obras al cuerpo teórico actual.

Entre ellos, Alan H. Schoenfeld (1991) (citado por Gascón, 1998) propone el marco para analizar la actividad matemática aquel que considera:

- el conocimiento de base;
- las estrategias heurísticas;
- las estrategias de control y gestión de procesos y
- el sistema de creencias.

Con esto, Schoenfeld identifica el aprendizaje de la matemática "con un proceso psico-cognitivo fuertemente influenciado por factores motivacionales y actitudinales"(Gascón, 1998, p.6).

Factores afectivos y pensamiento matemático

En el International Commission on Mathematical Instruction (ICMI) realizado en el año 2012 el grupo de estudio del tema 27 **Motivación, creencias y actitudes hacia las matemáticas y su enseñanza** reconoce la importancia de los factores afectivos en el pensamiento matemático, el aprendizaje y la enseñanza como también enfatiza su extenso reconocimiento en la Matemática Educativa. En este sentido se describe el amplio rango de conceptos usados en el área: creencias- actitudes- emociones- ansiedad- autoestima- interés- motivación- necesidades- metas- identidad. Declarando, además: "hoy sabemos que las variables afectivas pueden ser vistas como factores, o bien ocultas o explícitas, que influyen en los resultados del aprendizaje así como en la práctica pedagógica" (Pepin, Won, Roesken y Gómez Chacón, 2012).

Douglas B. McLeod (1989) impulsó el trabajo de investigación en aquellos asuntos relacionados con factores afectivos en la enseñanza y aprendizaje de la Matemática. Para justificar tal impulso, McLeod no hizo más que valorar las evidencias recogidas de profesores y alumnos en cuanto a asuntos provenientes dese de los afectos hacia la Matemática. Ya sea las creencias que manifiestan tener los profesores, como también los alumnos; las motivaciones por aprender de estos últimos; etc.

En su propuesta, McLeod caracteriza los factores afectivos como las **actitudes, creencias** y **emociones**. Más tarde, DeBellis y Goldin (1997) (citado por Zan, Brown, Evans y Hannula, 2006) incluye a las variables afectivas los **valores**.

Lo documentado por algunas investigaciones se sugiere que la repetición de experiencias emocionales puede ser vistas como la base para actitudes y creencias más estables. Al respecto, existe algún grado de acuerdo entre los distintos enfoques de Matemática Educativa en donde esto se traduce en la repetición de experiencias emocionales en contexto de enseñanza/aprendizaje de la Matemática puede ser la base para actitudes hacia la Matemática y creencias en torno a la actividad Matemática (Tabla 1).

Algunos estudios realizados, por ejemplo MCLeod (1989), identificaron la tendencia general de que la relación de los estudiantes con las matemáticas tiende a ser más negativa en el transcurso de los años escolares.

Más recientemente, en investigaciones sobre el afecto en la educación matemática se incluyen como variables afectivas: la identidad, los valores, la motivación, el interés.

A lo largo de los años, la comunidad de Matemáticos Educativos interesada por la influencia de los factores afectivos y sociales en la enseñanza y aprendizaje de la Matemática, ha provisto de algunos hallazgos:

Tabla 1 (Hannula, 2012)

Autores	Año	Hallazgos
Ma & Xu	2004	Logro/éxito matemático se relaciona con la actitud hacia la Matemática
Williams & Williams	2010	Relación recíproca entre auto-eficacia y logro/éxito matemático
Hyde. Hannula	1990 2002	El rol del género: varones evidencian mayor afecto positivo que las mujeres. Las mujeres tienen menor auto-confianza.
Allen & Carifio. Schoenfeld	2007 1985	En resolución de problemas, los expertos controlan sus emociones mejor que los novatos.
Di Martino & Zan	2010	Docentes mal utilizan el concepto de actitud, es una excusa cuando no son capaces de asistir al estudiante cuando el estudiante "se rindió".
Middleton & Spanais	1999	Correlación positiva: motivación y logro.

Estado del arte

En la octava edición del Congress of European Research in Mathematics Education (CERME 8) del año 2013, en la conferencia de inicio para las discusiones del Grupo de Trabajo dedicado al **Afecto y el pensamiento matemático** se declaró la necesidad de organizar las sesiones de conferencias de acuerdo a los ejes de los diversos artículos presentados. Ellos son:

1. Creencias y auto eficacia de los profesores,
2. Creencias y actitudes de los profesores,
3. Logros, seguridad e identidad de los alumnos y los profesores,
4. Motivación,
5. Emociones, creencias, actitudes de los alumnos en la resolución de problemas (Pantziara, Waege, Di Martino y Röskem, 2013)

Así, inspiradas en las discusiones de estas últimas sesiones de conferencias, han surgido cuestiones a las que seguir:

- ¿Cómo son los nuevos desarrollos en construcciones afectivas y cuál es su relación con las construcciones más tradicionales en el campo?
- ¿Cómo el afecto en estudiantes y profesores es influenciado por los instrumentos y el contexto? ¿cómo podemos reducir tal influencia?
- ¿Cuáles son las líneas de investigación de la relación matemática y afecto aún no han sido suficientemente exploradas? (Pantziara et al., 2013, p. 1272).

Respuesta para la última pregunta

En cuanto a la pregunta **¿Cuáles son las líneas de investigación de la relación matemática y afecto aún no han sido suficientemente exploradas?** (Pantziara et al., 2013) formulada por los participantes de las sesiones de conferencias del

CERME 8 (2013), proponemos parte de la respuesta. **Explorar e indagar sobre las emociones experimentadas por los profesores de Matemática en actividad**.

Nuestro interés se centra en aquellas experiencias que han desatado y/o desencadenado emociones, las cuales han sido valoradas cognitivamente por los profesores de Matemática en actividad.

En una investigación cualitativa nos hemos propuesto recabar la información mediante entrevistas semiestructuradas de preguntas abiertas a profesores de una escuela de pre grado de la Universidad Nacional de La Plata, que aceptaron ser informantes voluntariamente.

Para acceder a las experiencias emocionales de los profesores acudimos al lenguaje como uno de los tipos de evidencias para el estudio de las emociones y a la evocación de los recuerdos ya que las distintas emociones poseen diferente duración en el tiempo.

El dato cualitativo recolectado es de carácter retrospectivo, por lo que se debe recurrir a la memoria de los profesores. Adherimos a la idea de que la memoria está restringida o limitada por las creencias, preferencias, deseos y valores tanto personales como culturales de las personas. Por considerar que las emociones siempre implican algún grado de cognición adoptamos la aproximación teórica que así lo sostiene para acceder a las emociones de los profesores de matemáticas: La teoría Cognitiva de las Emociones (Ortony, Clore y Collins, 1996).

Marco Teórico

La teoría postula que la experiencia es una condición sine qua non de las emociones y entiende que las personas evalúan una situación y reaccionan, de allí que la valoración cognitiva es básica para la emoción. La teoría ofrece un modelo cómo se hacen esas valoraciones y se interesa en la contribución que la cognición hace a la emoción.

Así, la teoría describe a las emociones como reacciones con valencia (positiva o negativa) ante acontecimientos, agentes u objetos, de naturaleza particular determinada por la manera en cómo es interpretada la situación desencadenante. Por ejemplo, una emoción como la congoja resulta como la reacción ante una acontecimiento indeseable entonces el acontecimiento en sí mismo ha sido interpretado como indeseable por quien lo ha experimentado (Ortony, et al, 1996).

Como resultado de centrarse en alguno de los tres aspectos del mundo hay tres clases de emociones desencadenadas por: acontecimientos y sus consecuencias; agentes y sus acciones u objetos puros y simples. Para la primera clase se tienen los grupos: vicisitudes de los otros, basadas en previsiones y de bienestar. En el caso de la segunda clase: grupo atribución. En cuanto a la tercera clase el grupo es atracción. Además, a la conjunción de reacciones ante los agentes-consecuencias de los acontecimientos se la agrupa en bienestar/atribución.

Según la clase de emoción experimentada por una persona, ya sea las emociones basadas en acontecimientos o las atribuidas a algún agente o por atracción a algún objeto, la teoría cognitiva de las emociones propone variables centrales para la intensidad de las correspondientes clases de emociones: deseabilidad, plausibilidad, capacidad de atraer.

Con respecto a las variables que afectan la intensidad de las emociones, se tienen las GLOBALES que son aquellas que afectan a las tres clases de emociones. Las de naturaleza cognitiva son: *el sentido de la realidad, la proximidad y la cualidad de lo inesperado*. La excitación es un factor global de naturaleza fisiológica.

Además, en cada clase de emoción se pueden identificar variables LOCALES que las afectan. Las variables LOCALES pueden influir en la intensidad de las emociones en grupos particulares, ya sea al grupo de **emociones basadas en acontecimientos**, a las **emociones de atribución**, como también, a las **emociones de atracción**. Algunas de estas variables pueden influir en ciertas emociones y en otras no. Ellas son: **deseabilidad** en el caso de los **acontecimientos**, **plausibilidad** en el caso de los **agentes** y **capacidad de**

atraer en cuanto a los **objetos**. A su vez, para cada tipo de emoción hay variables locales de intensidad, así la variable **deseabilidad** contiene las variables **vicisitudes de los otros, vicisitudes del propio yo**. Por su lado, la variable **plausibilidad** es acompañada por las variables **fuerza de la unidad cognitiva y desviación de las expectativas**. En cuanto a la variable **capacidad de atraer***,* el esquema global de variables de intensidad de Ortony, Clore y Collins (1996) incluye la variable que afecta la intensidad de la emoción basada en objetos: **familiaridad**.

Metodología

En busca de aquellas experiencias que hayan desatado alguna emoción, consideramos pertinente realizar la recolección de la información mediante ejercicios de evocación de recuerdos a través de una entrevista amplia consistente en preguntas abiertas que inviten al entrevistado a ejercer una retrospección.

Entre todas las evidencias de la existencia de una emoción, está el lenguaje. Dado que el lenguaje suele ser ambiguo, suele estar repleto de sinonimia, de lagunas léxicas y de trampas lingüísticas, como fuente de evidencias de la existencia de emociones tienen que ser utilizado y analizado con cuidado.

Decidimos conformar dicha entrevista con preguntas que también arrojen luz sobre cuestiones tales como: biografía personal consistente en datos familiares, lugares en donde ha estudiado, donde ha trabajado y donde ha vivido el informante. La razón de la decisión recae en la importancia de tales asuntos que están estrechamente relacionados con el contexto social al que pertenece el entrevistado, y así facilitar el posterior trabajo de análisis a partir de las respuestas dadas en la entrevista.

En todos los casos, se señaló la libertad de contestar o no a cada una de las preguntas efectuadas. En cuanto a ampliar el conocimiento acerca del entrevistado, aquellas preguntas en directa relación con el tema de investigación, se indagó sobre la biografía como matemático de cada uno de ellos. En este sentido se buscó conocer sobre su formación profesional, su actividad como docente, su antigüedad ejerciendo la docencia. Respecto a la educación en general y a la educación matemática, se efectuaron preguntas sobre la opinión personal de cada entrevistado. A continuación se invitó a un recorrido sobre emociones experimentadas en relación con la matemática, ya sea como estudiante, como profesor. Finalmente, las preguntas se centraron en el "auto-concepto": como matemático y como profesor de matemáticas.

Como informantes para esta investigación cualitativa se contó con la colaboración de profesores en servicio de Matemáticas de la ciudad de La Plata, provincia de Buenos Aires de la República Argentina. Sus relatos, generados a partir de una sucesión de entrevistas semiestructurada de preguntas abiertas y retrospectivas, constituyen la fuente de información a partir de la cual accedimos a sus emociones.

Algunas preguntas planteadas en las entrevistas:

¿Qué emociones o sentimientos experimentas por las matemáticas?

¿Podrías describir emociones que has experimentado respecto a las matemáticas?

¿Recuerdas al menos dos experiencias emocionales malas como profesor de matemáticas?

¿Recuerdas al menos dos experiencias emocionales buenas como profesor de matemáticas?

Mediante el trabajo de transcripción textual de las entrevistas y su posterior análisis basado en el marco teórico escogido, nos hemos planteado generar discusiones a partir de los hallazgos en cuanto a las experiencias emocionales de los profesores de matemática. Así, nos complace contribuir en este eje el cual carece de exploración según lo documentado.

Análisis

Cada entrevista fue grabada, en algunos casos en formato video y en otros sólo en audio a pedido de los entrevistados.

Se designa al informante femenino como **Mn,** siendo **n** el número de participante en la investigación. En el caso de informante masculino **Hn**.

De acuerdo a la Teoría Cognitiva de las Emociones (Ortony, et al, 1996) se identificaron el tipo de emociones de acuerdo a tres especificaciones:

1. Las frases concisas que den muestra de las condiciones desencadenantes de la experiencia emocional. Esa evidencia es señalada en ***letra cursiva negrita***.

2. Las palabras que expresan la experiencia emocional se señalan en *letra cursiva.*

3. Las variables que afectan la intensidad de la emoción son señaladas <u>subrayando</u> aquellas palabras que lo evidencian.

Como resultado de un primer análisis llevado a cabo en las sucesivas entrevistas, se encontró una clara clasificación de las evidencias recolectadas. Así, contamos con reflexiones claras de los entrevistados acerca de:

- la Matemática;
- ser Profesor de Matemática;
- ser Alumno/estudiante de Matemática.

Ésta clasificación responde a una relación entre la valoración cognitiva que hace el entrevistado y la aparición de experiencias que generaron emoción en cada uno de ellos.

Con esto queremos decir que la reacción emocional experimentada y su valoración cognitiva está regulada por la interpretación que hace la persona, de cómo evalúa la situación y reacciona.

Para ejemplificar citamos algunos párrafos:

M1: Es como…no saber Matemática equivale a no saber leer.

M2: Para mí es un juego divino (…) me parece que es un potencial, una caja de herramientas que nos permite mucho, digamos: predecir, resolver, crear. Da lugar a esto, a ejercer, a jugar un juego además. Y además da placer!!

M3: [la Matemática] sirve para la vida. Bueno, sirve no solamente para calcular las cosas sino amplía el pensamiento.

En cuanto a la evocación de recuerdos con reacciones emocionales en las clases de Matemática, a continuación incluimos la transcripción fiel de algunas de ellas:

Grupo Bienestar/Atribución (de otro)

Aprecio, Júbilo: Gratitud-Orgullo

M1: Resulta que el viernes tengo Matemática con 5º año, les cuesta Irracionales. Les das propiedades y no se las acuerdan.

Me quedaba potencia de exponente fraccionario. Llevé un cuadro con potencia de exponente fraccionario, que hagan con la calculadora y ellos lo armaron*. **Se re-engancharon**. Me puso contenta* ***porque a los que les cuesta fueron los que obtuvieron la regla****.* Lo que más me gustó es que un chico repetidor con dificultades, su grupo fue el primero en responder.

Me gustó cómo discutían, yo les decía: "fijate que funcione con todos". ***Cuando terminé (la clase), les resultó re-fácil****.* Me fui a mi casa re-chocha. Siempre siento que se les hace pesado (la clase), aburrido, pero ***esta vez salió bien****.*

Grupo Bienestar/Atribución

Aprecio, Júbilo: Gratitud

M5: Tenían que calcular la altura, el tamaño de una ventana, **el problema típico de trigonometría y ellos establecían una proporcionalidad directa en el tamaño y el ángulo**. Entonces, bueno, **discutimos**. *Esas cosas son lindas y es interesante* ***que lo asuman como desafío*** y <u>me encanta</u> cuando existe una competencia a ver quién puede descolocar al profesor. Es decir, quién propuso la alternativa más complicada para que uno tenga que pedir un momento para pensarlo.

Grupo Atribución

Autorreproche-reproche

M1: ***Estuve ansiosa*** en el Taller de Matemática Aplicada. ***Pensé que se iban a enganchar con las actividades*** de Estadística, pero [los alumnos] <u>*estaban apáticos*</u>.

Grupo Bienestar/Atribución

Reproche, Congoja: Ira

M4: Me apasiona dar clases (...) Pero en cuanto a <u>*experiencia negativa*</u> ***es la creciente falta de interés***, es año a año. Se puede dar menos, se puede dar menos rigurosidad, se puede dar menos cantidad porque los alumnos no tienen interés.

Primeras conclusiones y limitaciones

En primer lugar, cabe mencionar lo que se ha observado como limitante del tipo metodológico es en cuanto a la recolección de los datos. Es difícil conseguir que los profesores en servicio nos regalen una porción de su tiempo para llevar adelante la recolección de los datos mediante las entrevistas. Más difícil aún nos resultó contar con su participación para realizar un muestre más fino, que en nuestro trabajo se trata de reportes diarios.

Sin embargo, consideramos valiosa la participación de los informantes ya que nos ha dado la oportunidad de reflexionar sobre propuestas para el rediseño del método en futuras investigaciones.

En cuanto a la identificación de emociones, como primer indicio podemos afirmar que la **variable global** presente con mayor frecuencia ha resultado **la cualidad de lo inesperado**. Así dicha variable afecta la intensidad de las emociones reportadas. Un ejemplo de ello se evidencia en la siguiente frase pronunciada uno de los entrevistados

> **M1**: Lo que más me gustó es que un chico repetidor con dificultades, su grupo fue el primero en responder.

Este primer análisis nos hace pensar que dado los propósitos de enseñanza regulados por metas y normas es que las emociones que aparecen con mayor frecuencia responden a reacciones ante acontecimientos y reacciones ante agentes, ya sea tratándose de uno mismo como agente, así como también considerando a los estudiantes como agentes.

Recordemos que, según la Teoría Cognitiva de las Emociones (Ortony, et al, 1996), las metas son las que regulan la variable de deseabilidad de los acontecimientos; mientras que las normas son las que regulan la variable de plausibilidad de la acción de los agentes.

Referencias Bibliográficas

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Reserches en Didactique des Mathématiques, Vol.18/1* (52), 7-33.

Hannula, M. (2012). Exploring new dimensions of mathematics-related affect:embodied and social theories. *Research in Mathematics Education Vol.12* (2), 137-161.

Mc.Leod, D. (1989). Research on affect in mathematics education: a reconceptualization. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics teaching and learning* (pp. 575-596). New York: MacMillan.

Ortony, A.; Clore, G.L. y Collins, A. (1996). La estructura cognitiva de las emociones. México: siglo XXI.

Pantziara, M., Waege, K., Di Martino, P. & Röskem, B. (2013). Introduction to the papers and posters of WG 8: Affect and Mathematical Thinking. En B. Ubuz, C. Haser, M. Mariotti (Eds.) *Proceeding of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp1272-1278). Turquía: ERME.

Pepin, B.; Won, J.; Roesken, B.; Gómez Chacón, I.(2012). TSG 27 Motivación, creencia y actitudes hacia la matemática y su enseñanza. Grupo de estudio del tema 27 del ICMI 12 Convocatoria para la presentación de trabajos. Seúl, Corea. Recuperado el 2 de Mayo de 2015 de www.icme12.org/sub/tsg/tsgload.asp?tsgNo=27.

Soto D. (2010). *El Discurso Matemático Escolar y la Exclusión. Una visión Socioepistemológica*. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Zan, R. Brown L., Evans, F & Hannula, M. (2006). Affect in Mathematics Education: an introduction. *Educational Studies in Mathematics* 63(2006), 113-121.

Una mirada sobre las relaciones entre la Teoría Antropológica de lo Didáctico y el Enfoque Instrumental

Mario A. Di Blasi Regner

En esta conferencia reflexionaré sobre algunas relaciones que pueden establecerse entre la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1999) y el Enfoque Instrumental (Artigue, 2002). Esta reflexión busca ser un aporte para comprender las transformaciones que se producen cuando se introducen, como mediadoras, las TIC en las clases de Matemática.

La integración de ambos enfoques teóricos permite una justa valoración de las funciones epistémicas de las TIC en la Educación Matemática y una nueva visión sobre el valor pragmático y epistémico de las técnicas.

Comparto con otros investigadores (Mejía Palomino, 2014; Olive y Makar, 2010) la idea que los conceptos de técnica instrumentada, entendida como una secuencia relativamente estable de interacciones entre el usuario y el artefacto con un propósito particular, y de esquema de utilización (Rabardel, 2011) son los que permiten relacionar con mayor claridad el Enfoque Instrumental y la Teoría Antropológica de la Didáctico. Ambos conceptos son valiosas herramientas para el análisis de las actividades matemáticas para las que un artefacto, devenido en instrumento, es un medio de realización de las mismas.

Referencias

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of computer for Mathematical Learning*,7, pp. 245- 274.

Chevallard Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 19, nº 2, pp. 221-266. Traducción de Ricardo Barroso Campos.

Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Sevilla. Recuperado el 01/09/2015 de http://www.aloj.us.es/rbarroso/Pruebas/CHEVALLARD.PDF.

Mejía Palomino, M. (2014). La técnica instrumentada, vínculo entre la Teoría Antropológica de lo Didáctico y la Génesis Instrumental, *Memorias del XII COLOQUIO REGIONAL DE MATEMÁTICAS y II SIMPOSIO DE ESTADÍSTICA*, Recuperado el 01/09/2015 de http://dematyes.udenar.edu.co/coloquio/?page_id=126.

Olive, J., y Makar, K. (2010). Mathematical Knowledge and Practices Resulting fromAccess to Digital Technologies. En C. Hoyles y J-B. Lagrange (Eds.), *Mathematics education and technology-Rethinking the terrain. The 17th ICMI Study* (pp. 133-177). New York: Springer.

Rabardel, P. (2011). Los hombres y las tecnologías. Visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos (Trad. M. Acosta). Colombia: Ediciones Universidad Industrial de Santander. (Trabajo original publicado en 1995).

El Concepto De Función Lineal En El Bachillerato Tecnológico: Un Estudio Sobre Su Implementación

Rebeca Flores García
CICATA – IPN

Resumen

Los estudios relacionados con el desarrollo curricular es un campo que ofrece alternativas curriculares para un sistema educativo y en los últimos años está centrado en el profesor, de ahí la importancia de esta investigación, la cual pretende analizar y describir las transformaciones que construyen alrededor del concepto de función lineal tres profesores que laboran en el nivel medio superior técnico en México. Para desarrollar el estudio se acude al estudio de caso, el cual está dirigido a comprender las dinámicas presentes en contextos muy particulares, adoptando distintos métodos para la recopilación de evidencia. Una de las principales motivaciones en la realización de esta investigación tiene que ver con la idea de entender con un poco de mayor profundidad lo que envuelve la implementación de un currículum en el aula. De manera particular se pretende profundizar lo que sucede entre el currículum escrito y el currículum implementado; para ello el estudio utilizó como marco de análisis el modelo propuesto por Stein, Remillard y Smith (2007) el cual está integrado por cuatro componentes: currículum escrito, currículum planeado, currículum implementado y el aprendizaje de los estudiantes.

Palabras clave: función lineal, bachillerato tecnológico, currículum

Planteamiento del problema de investigación

El estudio del concepto de función en la enseñanza de las matemáticas en el nivel medio superior desempeña un papel importante en el aprendizaje de los estudiantes, no sólo por estar relacionado con temas de otras asignaturas, sino porque permite representar situaciones reales (Hitt, 2002). Cabe resaltar además, los dilemas que se gestan cuando se emprenden estudios ligados al concepto de función o a un tipo función, para el caso que nos ocupa la focalización se hará sobre la función lineal. Por ejemplo, Díaz (2008) advierte que en el aspecto curricular la noción de función es una hebra que atraviesa desde los niveles básicos hasta los universitarios, advirtiendo además de las dificultades que enfrentan los estudiantes por entender este concepto; también señala cómo esta noción ha generado un conjunto creciente de investigaciones, desde los que estudian los problemas de su enseñanza, las dificultades de su aprendizaje, los que proponen marcos teóricos, hasta los que se centran en la multiplicidad de interpretaciones de la noción de función.

Diversos son los autores que se han dedicado a trabajar sobre la noción de función. Leinhardt, Zaslavsky y Stein (1990) quienes en la década de los ochenta realizaron una revisión bibliográfica que cubre una década aproximadamente, en la cual muestran las dificultades que los estudiantes enfrentan al tratar de conceptualizar la idea de función, cuestiones ligadas a la correspondencia, la linealidad, la representación de funciones, además de su lectura e interpretación. Por otro lado, en la investigación desarrollada por Birgin (2012) se reconocen a las funciones lineales como una idea compleja, de múltiples facetas cuyo poder y riqueza permean casi todas las áreas de la matemática. Agregando que dadas sus diversas aplicaciones en el mundo real, refuerzan la comprensión de temas más avanzados como aquellos provenientes del Cálculo.

Si bien es cierto, el concepto de función lineal ha sido ampliamente estudiando desde una perspectiva cognitiva, también es cierto que existen ámbitos desde los cuales aún no se han estudiado, al menos no con la profundidad y detalle que una investigación de naturaleza local pueda ofrecer, tal es el caso de esta investigación, la cual básicamente se centra en estudiar las transformaciones que el profesor de matemáticas de bachillerato tecnológico genera al enseñar el concepto de función lineal en el curso de Pensamiento algebraico y de funciones impartido en el segundo semestre del plan de estudios propuesto por el nivel medio superior técnico.

Esta idea de incluir como una noción clave dentro de la pregunta de investigación, se debe a la importancia que cobra el entender un poco más allá los cambios y modificaciones que el profesor de matemáticas construye alrededor de un objeto matemático.

Para la Real Academia Española la palabra *transformar* proviene del latín, del verbo transformare. Está formado por la voz latina forma cuya raíz hace referencia a la figura o imagen y por el verbo *transere* cuyo concepto indica transitar, ir al otro lado. Su significado literal es ir al otro lado de la figura o imagen lo que implica un cambio, de allí su significado como metamorfosear, mudar la forma.

Investigaciones alrededor del concepto de función lineal en matemática educativa

En esta sección se pretende dar cuenta de la naturaleza de algunos estudios que proveen información relacionada con el objeto matemático que este estudio aborda, sobre todo para dejar ver la tendencia de las investigaciones en los últimos años.

A) Estudios cognitivos

a. Relacionado con alumnos

En el trabajo presentado por Chiu, Kessel, Moschkovich y Muñoz-Nuñez (2001) se plantea un estudio de caso en el que muestran cómo emergen y cambian las estrategias y concepciones asociadas de dos estudiantes en el transcurso de un curso de seis sesiones de tutoría, diseñado para desarrollar el conocimiento conceptual de funciones lineales.

Mientras que Posada y Villa-Ochoa (2006) desarrollaron una propuesta para introducir el concepto de función lineal desde una perspectiva variacional, ahí se retoma el concepto de unidad significante introducido por Duval (1999) para determinar algunas características de la función lineal.

Por su parte, Birgin (2012) muestra en su estudio que los estudiantes tienen dificultades para comprender a las funciones lineales, para desarrollar sus concepciones, para trasladarse entre representaciones y en particular que no identifican la estructura completa del concepto de función lineal.

b. Relacionado con el profesor

El trabajo generado por Even (1993) se muestra un estudio relacionado con 152 profesores de nivel secundario, en el que se explora el conocimiento de un contenido pedagógico, en este caso se trata de la enseñanza del concepto de función. El análisis evidencia que muchos de los sujetos no tenían una concepción actualizada de la función. La apreciación de la naturaleza arbitraria de funciones faltaba, y muy pocos podrían manifestar la trascendencia y el origen de la exigencia univalencia. Se trata entonces, de una concepción limitada y que ha influenciado su pensamiento pedagógico.

B) Estudios históricos

La investigación planteada por Acosta (2011) propone que la linealidad a través de sus significados, y su antecedente la proporcionalidad, son nociones que han evolucionado en la historia, primero a partir de necesidades cotidianas de la época y culturas, hasta formar desde el siglo XIX, un cuerpo de conocimientos estructurados en teorías formales. De este modo, se precisa que la evolución de estas ideas puede aportar elementos que resulten en la instalación didáctica de la noción de linealidad en diferentes momentos en que los estudia un alumno en su trayectoria escolar. Aseverando además que la didáctica de la matemática, no ha incorporado los elementos de vínculo entre nociones de linealidad, que se presentan entre temas de matemáticas, y mucho menos entre cursos.

Además agrega que no resulta raro que en medios didácticos escolares la linealidad esté vinculada a experiencias cotidianas a cualquier hecho continuo que se comporta como una línea recta. Así, el discurso escolar, tanto en los libros de texto en que se apoya la enseñanza como las explicaciones que brinda un docente en la escuela, a menudo parte de experiencias comunes para explicar un fenómeno lineal.

C) Estudios curriculares

En la investigación desarrollada por Lloyd y Wilson (1993) se exponen ideas ligadas al impacto de las concepciones de los profesores en relación a funciones y su implementación en una reforma curricular.

En el estudio de Gilbert (2003) plantea una experiencia de desarrollo profesional, relacionada con un análisis de estudios de caso basados en vídeo para los profesores de matemáticas de secundaria en funciones lineales.

Por su parte Chávez, Grouws, Tarr, Ross y McNaught (2009) presentan hallazgos relacionados con profesores de matemáticas de secundaria en el uso de materiales curriculares, de manera particular tocan el contenido de la función lineal.

Marco referencial

Este estudio se caracteriza por apoyarse de algunas herramientas teóricas fundamentales para explicar la naturaleza y dar soporte a la investigación, entre ellas están, currículum, transformación y materiales instruccionales.

A) La noción de currículum y la adopción de un modelo

Una de las primeras nociones sobre la cual es crucial posicionar en este estudio es el de currículum, ya que por ejemplo Díaz Barriga (2005) advierte que en el campo de las investigaciones sobre currículum es importante para nuestro país por la gran cantidad de productos generados al respecto y por ser un componente central en el ámbito educativo. Sin embargo, también se reconoce la existencia de distintas formas de adentrarse al mundo del currículum, es decir; el currículum puede ser entendido o conceptualizado de maneras diferentes. Tal es el caso de Burkhardt (2014) quien en su estudio reconoce que el término currículum se utiliza con diversos significados, aun cuando lo advierta específicamente para Estados Unidos, es posible extender esa idea a cualquier parte del mundo. Por su parte Hirsch y Reys (2009) utilizan el término currículum para referirse a la construcción teórica que incluye tanto lo que la sociedad valora y espera que se aprenda en un sistema escolar en términos de contenido matemático, así como los materiales utilizados por los profesores para impartir la enseñanza de las matemáticas a los estudiantes.

Para el desarrollo de este estudio se adoptó el modelo propuesto por Stein, Remillard y Smith (2007) el cual está compuesto por cuatro amplias categorías representadas en la figura 1.

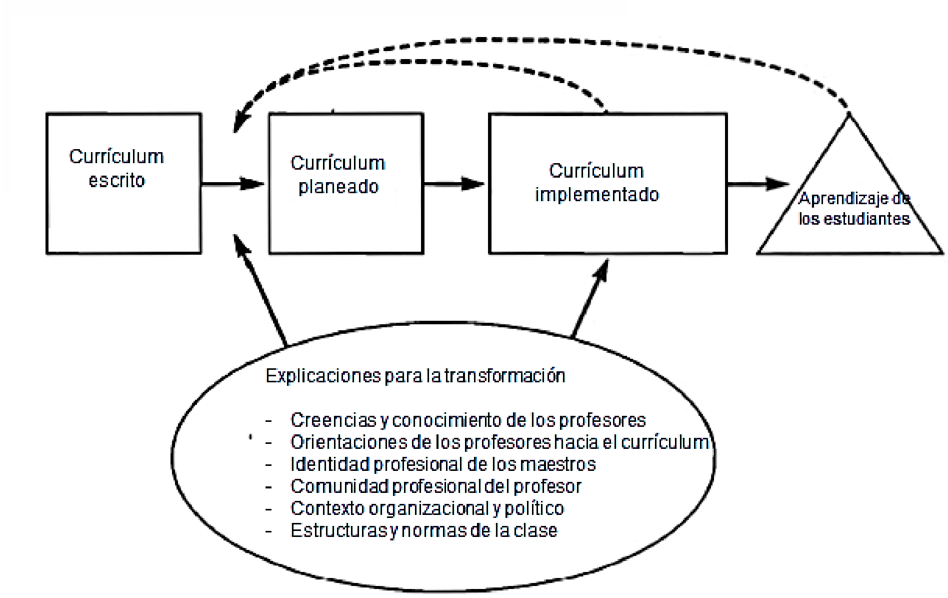


Figura 1. Modelo propuesto por Stein, Remillard y Smith (2007, p. 322).

A continuación, se describen las características de este modelo:

- El currículum escrito: Se refiere al plan de estudios, representado a través de los materiales curriculares y todos aquellos recursos didácticos que le sean conferidos por parte del subsistema escolar correspondiente.

- Currículum planeado: Esta componente considera las intenciones del profesor, es decir; las actividades que diseña y planea para llevarlas al aula.
- Currículum implementado: Aquí se contemplan todos los procesos involucrados mientras se desarrollan las actividades en el aula.
- Aprendizaje de los estudiantes: Esta componente tiene que ver con el aprendizaje que logran los estudiantes.

Cabe destacar tres cuestiones, la primera está referida a que sólo utilizaran tres de las cuatro componentes, es decir; al ser un estudio centrado propiamente en el profesor, se reserva el trabajar con la última componente. Por otro lado, cabe destacar que este modelo provee elementos que ningún otro modelo procura, tal es el caso de la segunda componente, la del currículum planeado, ya que se le da un lugar para caracterizar aquellas intenciones, ideas y actividades que el profesor considera, así como los recursos que utiliza. Nótese además que existen vínculos entre las componentes que permiten profundizar un poco aspectos relacionados con las transformaciones generadas por el profesor alrededor del objeto en cuestión, algunas de ellas pueden ser las creencias y conocimiento de los profesores, identidad profesional del profesor, entre otros.

La revisión de otros modelos propuestos para estudiar el currículum como el de Flanders (1994) y Hirsch y Reys (2009) permitió decidir el uso del modelo de Stein y colaboradores (2007), ya que aun cuando ellos también incluyen cuatro componentes, ninguno explicita el currículum planeado, este se omite o se incluye en alguna de las componentes.

El concepto de material instruccional

De acuerdo con lo expuesto en el modelo de Remillard y Heck (2014) habrá de entenderse por material instruccional al conjunto de recursos destinados a apoyar o complementar la instrucción, incluyendo libros de texto, guías curriculares, descripciones de tareas matemáticas y programas de instrucción. Los libros de texto y guías curriculares son la forma más común de materiales didácticos que se usan en todo el mundo y siguen desempeñando un papel fundamental en los sistemas educativos nacionales. Dicho concepto tiene inclusión en la estructura general del modelo propuesto por Remillard y Heck (2014).

La idea de incluir el concepto de material instruccional se debe a que agrupa un conjunto de elementos –entre ellos el libro de texto- que puede ayudar a aclarar un poco más el rol que juega en el modelo propuesto por Stein y colaboradores.

Método

El estudio se llevó a cabo en el nivel medio superior técnico, el cual se caracteriza por ser una modalidad bivalente, esto significa que los estudiantes que acceden a este nivel adquieren tanto una formación profesional para desenvolverse en el campo laboral, así como una formación en áreas disciplinares para continuar sus estudios en un nivel superior. Una de las aportaciones de este estudio, es producir una investigación cuyo foco de atención es un contenido matemático específico, que ha sido muy estudiado, pero que no se centra en la parte cognitiva, sino en el sujeto que enseña ese objeto para intentar entender y conocer cómo se da esa interacción entre el sujeto y el objeto. Esto, considerando las crecientes investigaciones sobre el concepto de función lineal que se han centrado en aspectos cognitivos, o las dificultades que enfrentan los estudiantes, como lo señala Birgin (2012).

Se reconoce que son pocos los estudios desarrollados en relación al ámbito del currículum y específicamente al currículum planeado e implementado, componentes centrales en el modelo propuesto por Stein, et al (2007). De ahí que aun prevalece un interés tanto para profesores como investigadores en reflexionar los cambios curriculares acontecidos en el nivel medio superior en México, como lo reportan los estudios planteados por Ibáñez y Dolores (2012) y Valenzuela y Dolores (2012). Para desarrollar esta investigación, se recurrió al método de investigación denominado estudio de caso, el cual de acuerdo con Eisenhart (1989) se trata de una estrategia de investigación dirigida a comprender las dinámicas presentes en contextos muy particulares, adoptando distintos métodos para la recopilación de evidencia con el fin de describir, verificar o generar teoría. De acuerdo con Yin (2009) existen distintas fuentes de evidencia para desarrollar los estudios de caso, por ello es que en este estudio recurrimos a la revisión del programa de estudios propuesto, a la revisión de tres libros de texto que utilizan los profesores, a la grabación de clases, además de la aplicación de una encuesta y una entrevista a los profesores involucrados.

Este estudio se desarrolló en seis etapas considerando el modelo propuesto por Stein et al (2007) para abordar los tres primeros componentes: currículum escrito, currículum planeado y currículum implementado.

- Etapa 1: Revisión de los documentos oficiales, estos incluyen documentos oficiales, guías de apoyo e incluso libros de texto que no necesariamente son considerados como oficiales.
- Etapa 2: Elaboración y aplicación de un instrumento para identificar información general de los tres profesores involucrados en el estudio.
- Etapa 3: Recopilación de los materiales de apoyo que el profesor utiliza para el desarrollo de su curso denominado Pensamiento algebraico y de funciones.
- Etapa 4: Grabaciones de clase cuando los profesores aborden el tema en cuestión durante su curso.
- Etapa 5: Construcción de un marco de análisis y las categorías a utilizar en el análisis de la información.
- Etapa 6: Aplicación de una entrevista semiestructurada a los profesores para acceder a información detallada del análisis realizado.

Resultados iniciales

a) En relación al currículum oficial:

De manera implícita se detectaron al menos cinco representaciones que el profesor debe abordar al trabajar con función lineal, la representación verbal, tabular, algebraica, la gráfica y cómo ecuación. En ese sentido, Birgin (2012) señala que varias de sus representaciones se encuentran entrelazadas, las más comunes son: ecuaciones, tablas y gráficas. Mientras que Sherin (2002) advierte que la comprensión del concepto de función lineal es complejo e incluye niveles de abstracción.

b) En relación al currículum planeado:

La revisión de los libros de texto utilizados por los profesores permitió identificar algunas de las componentes que priorizan con respecto a la función lineal, además de los tipos de representaciones que más enfatizan para que sean utilizados tanto por el profesor, como por los estudiantes, de ahí su importancia. Los textos utilizados fueron: *Haciendo matemática: Álgebra II* (Orozco, s/f), *Pensamiento algebraico* (Eslava, 2009) y *Pensamiento algebraico* (Mendoza, 2014).

Entre los resultados iniciales obtenidos, se encuentran que algunos de los profesores utilizan los ejercicios tal cual provienen en el libro de texto, incluso hacen uso de los conceptos que ahí se manejan o toman sólo una parte de la actividad para apoyar el desarrollo de su clase.

c) Currículum implementado:

En las grabaciones es posible observar elementos como: el discurso del profesor, la definición de función lineal que maneja, las características que prioriza, además de las representaciones que le son más significativas o útiles para el desarrollo de sus actividades, así como los distintos tipos de recursos de los que se apoyan para el desarrollo de los temas, sobresale el uso de software por ejemplo.

Reflexiones finales

Este estudio se encuentra en proceso, uno de los propósitos es dar cuenta del rol de la función lineal dentro del currículum en el bachillerato tecnológico mexicano. De ahí que los resultados presentados son apenas un primer acercamiento que conforme avance podrá mostrar mayor información al respecto.

Parte de los resultados indican que para algunos investigadores interesados en desarrollar modelos teóricos para estudiar el currículum de matemáticas, le brindan un lugar muy específico al libro de texto como lo señalan Hirsch y Reys (2009); otros los incluyen como parte del currículum oficial como el modelo propuesto por Flanders (1994). Por otro lado, la formación de los profesores involucrados en el estudio, deja entrever la influencia de su entorno, así como elementos propios de su formación, desde aquella que proviene de una escuela normal, una universidad, hasta aquel que proviene de un centro de formación de maestros.

Además, se reconoce que el objeto función lineal tiene un papel específico dentro del currículum, que quizá el profesor no necesariamente lo identifique: uno proveniente de la Geometría Analítica y el Cálculo y otro proveniente del Álgebra lineal.

Referencias

Acosta, J. (2011). *La noción de linealidad. Una aproximación epistemológica, didáctica, cognitiva y sociocultural.* Tesis de doctorado no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN, México.

Birgin, O. (2012). Investigation of Eighth-Grade Students' Understanding of the Slope of the Linear Function. *Boletim de Educação Matemática* 26 (42), 139-162.

Burkhardt, H. (2014). Curriculum design and systemic change. En Y. Li & G. Lappan (Eds.), *Mathematics curriculum in school education*, (pp. 13-34). Dordrecht: Springer. doi: 10.1007/978-94-007-7560-2

Chávez, Ó., Grouws, D.A., Tarr, J.E, Ross, D.J., y McNaught, M.D. (2009). Mathematics Curriculum Implementation and Linear Functions in Secondary Mathematics: Results from the Comparing Options in Secondary Mathematics Project. *American Education Research Association, San Diego, CA*. Recuperado de: http://cosmic.missouri.edu/aera09/ChavezGrouwsTarrRossMcNaught2009.pdf

Chiu, M. M., Kessel, C., Moschkovich, J., & Muñoz-Nuñez, A. (2001). Learning to graph linear functions: A case study of conceptual change. *Cognition & Instruction*, 2, 215-252.

Díaz Barriga, F. (2005). Desarrollo del currículo e innovación: Modelos e investigación en los noventa. *Perfiles Educativos, 27*(107), 57-84.

Díaz, J.L. (2008). El concepto de función. Investigaciones y enseñanza. En E. Rodríguez, S. Sosa, F. Luque, C. Robles y M. Urrea (Eds)*. Memorias de la XVIII Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas 27* (p.p. 35-40). Sonora: Mosaicos Matemáticos.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Universidad del Valle: Santiago de Cali.

Eisenhardt, K. M. (1989). Building theories from case study research. *Academy of Management Review*, *14*(4), 532-550.

Eslava, M. (2009). *Pensamiento algebraico.* México: Grupo Editorial Patria.

Even, R. (1993). Subject-matter knowledge and pedagogical content knowledge: Prospective secondary teachers and the function concept. *Journal for Research in Mathematics Education 24*(2), 94-116.

Flanders, J. R. (1994). Textbooks, teachers, and the SIMS test. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(3), 260-278.

Gilbert, M. (2003). *A professional development experience: An analysis of video case-based studies for secondary math teachers in linear functions*. Tesis de doctorado no publicada. Universidad de Washington

Hirsch, C. y Reys, B. (2009). Mathematics curriculum: A vehicle for school improvement. *ZDM*, *41*(6), 749-761. doi: 10.1007/s11858-009-0218-0

Hitt F. (2002). *Funciones en contexto.* México: Pearson Educación (Prentice Hall).

Ibáñez, G. y Dolores, C. (2012). Relación entre el currículum oficial y el currículum potencial. El caso de los textos de preparatoria. En C. Dolores y M. S. García (Comp.), *¿Hacia dónde reorientar el currículum de matemáticas del bachillerato?* (pp. 87-109). México, D.F.: Plaza y Valdez, UAG.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O. y Stein, M. M. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning and teaching. *Review of Educational Research, 60*(1), 1-64.

Lloyd, G. W. y Wilson, M. (1998). Supporting innovation: the impact of a teacher's conceptions of functions on his implementation of a reform curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education 29* (3), 248-274.

Mendoza, J. (2014). *Pensamiento algebraico*. Cuaderno de apoyo didáctico. México: Editorial Grandes Ideas.

Orozco, E. A. (s/f). *Haciendo matemática.* México: Desde el aula.

Posada, J. y Villa-Ochoa, J. A. (2006). *Propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal desde una perpectiva variacional.* Tesis de Maestría no publicada. Medellín: Universidad de Antioquia.

Remillard, J.T. y Heck, D. J. (2014). Conceptualizing the curriculum enactment process in mathematics education. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *46*(4), 705 – 718. Doi: 10.1007/s11858-014-0600-4

Sherin, M. G. (2002). When teaching becomes learning. *Cognition and Instruction 20*(2), 119-150

Stein, M. K., Remillard, J., y Smith, M. S. (2007). How curriculum influences student learning. En F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 319-370). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Valenzuela, C. y Dolores, C. (2012). Entre el currículum oficial e impartido: qué es lo que se enseña en el aula. En C. Dolores y M. S. García (Comp.), *¿Hacia dónde reorientar el currículum de matemáticas del bachillerato?* (pp. 111-138). México, D.F.: Plaza y Valdez, UAG.

Yin, R. K. (2009). *Case study research. Design and methods.* Thousand Oaks, CA: Sage Publications.